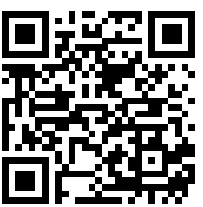
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Digitized by Google

11. 396

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO VI.

1903

TORINO
CARLO CLAUSEN
HANS RINCK SUCC.
1903

Digitized by Google

LIBRAIRIE GAUTHIER VILLARS
Paris (6) - *Quai des Grands Augustins, 55.* - Paris (6)

LEÇONS SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE
DES SURFACES
ET LES
APPLICATION GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL
Par GASTON DARBOUX,
Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences,
4 VOLUMES GRAND IN-8, AVEC FIGURES, SE VENDANT SÉPARÉMENT

Tome I; 1887: **15** *fr.* - Tome II; 1889; **15** *fr.* - Tome III; 1894; **15** *fr.*
Tome IV; 1896: **15** *fr.*

TRAITÉ D'ANALYSE,
Par ÉMILE PICARD,
Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté de Sciences de Paris.
QUATRE BEAUX VOLUMES GRAND IN-8 SE VENDANT SÉPARÉMENT

Tome I; 1901: **16** *fr.* - Tome II; 1893: **15** *fr.* - Tome III; 1897: **18** *fr.*
Tome IV; *(sous presse)*

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE RATIONNELLE,
Par PAUL APPELL
Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences.
TROIS BEAUX VOLUMES GRAND IN-8, AVEC FIGURES, SE VENDANT SÉPARÉMENT

Tome I (2.e edition); 1902: **18** *fr.* - Tome II (2.e edition); 1904: **16** *fr.*
Tome III; 1903: **17** *fr.*

ESSAIS
SUR LA
PHILOSOPHIE DES SCIENCES,
ANALYSE - MECANIQUE,
Par C. de FREYCINET
DE L'INSTITUT.

2.e edition. Un volume in-8; 1900: **6** *fr.*

Digitized by Google

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

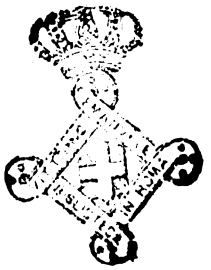
DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA



ANNO VI.

1903

TORINO
CARLO CLAUSEN
HANS RINCK SUCC.
1903

Digitized by Google

Proprietà letteraria

Genova. — Tipografia Sordomuti

Digitized by Google

INDICE

G. Vacca. Sopra un probabile errore di Gabrio Piola, p. 1-4.
G. Loria. Giambattista Caraccioli. Schizzo biografico, p. 33-38.
M. Lazzarini. Leonardo Fibonacci, le sue opere e la sua famiglia.

RECENSIONI ED ANNUNZI.

G. Loria. Spezielle alg. und transcend. ebene Kurven [U. Amaldi], p. 5-13. — Opere matematiche di **E. Beltrami.** I. [G. L.], p. 13-14. — **R. Fricke.** Hauptsätze der Differential-und Integralrechnung [G. Vivanti], p. 14-15. — **G. Holzmüller.** Elemente der Stereometrie [G. L.], p. 15-17. — **N. Grassi.** Elementi di Geometria descrittiva [G. L.], p. 18. — **F. Rudio.** Die Elemente der analytischen Geometrie. II. [G. L.], p. 18-19. — **Francesco Brioschi.** Opere matematiche. II. [G. L.], p. 19. — **G. Gallucci.** Saggio d'introduzione alla filosofia delle matematiche [G. Vailati], p. 19-21. — Compte rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens [G. L.], p. 21-23. — **G. Scheffers.** Einführung in die Theorie der Flachen [G. L.], p. 23-25. — **E. d' Ovidio.** Geometria analitica [G. L.], p. 25. — **H. Godefroy.** Théorie élem. des Séries [G. L.], p. 26. — Annuaire pour l'an 1903 publié par le Bureau des longitudes [G. L.], p. 27. — **F. Amodeo.** Elementi di geometria proiettiva, p. 27. — **Hamburger.** Gedachtnissrede auf I. L. Fuchs, p. 27. — Sitzungsberichte der Berliner math. Gesellschaft, p. 27. — **G. Vivanti.** Lezioni sulla teoria della risoluzione delle equazioni di V grado, p. 28. — **Schoute.** Mehrdimensionale Geometrie. I. [G. L.], p. 39-42. — **Torelli.** Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato [M. Vecchi], p. 42-48. — **Rececda.** Lecciones de geometria metrica [G. L.], p. 48-49. — **Geissler.** Die Grundsatze und das Wesen des Unendlichen [G. Vivanti], p. 49-53. — **Holzinger.** Aritmetica politica [G. L.], p. 54. — **G. Gallucci.** Saggio di una introduzione alla filosofia delle matematiche. Risposta. [G. Gallucci], p. 54-56. — **Bardey's.** Aufgabensammlung [G. L.], p. 56-57. — **Bardey's.** Anleitung zur Auflosung eingekleideter algebr. Aufgaben [G. L.], p. 57-58. — **Pascal.** Calcolo infinitesimale [M. Chini], p. 58-59. — **Stolz und Gmeiner.** Theoretische Arithmetik [G. Vivanti], p. 59-60. — **Frizzo.** De numeris ecc. Appendice [G. L.], p. 60. — **Schuster.** Geometrische Aufgaben [G. L.], p. 61. — **Burkhardt und Meyer.** Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, p. 61-62. — **E. Borel.** Leçons sur les séries à termes positifs [G. Vivanti], p. 65-67. — **Königsberger.** H. von Helmholtz. I. [G. L.], p. 68-70. — **Bachmann.** Niedere Zahlentheorie. I. [G. Vivanti], p. 70-71. — **F. Enriques e U. Amaldi.** Elementi di geometria [F. Palatini], p. 71-79. — **Schülke.** Aufgaben-Sammlung [G. L.], p. 79-80. — **G. Vivanti.** Complementi di matematica [M. Chini], p. 80-81. — **C. Alasia.** Saggio terminologico-biografico sulla recente geometria del triangolo [G. L.], p. 82. — **N. H. Abel.** Memorial [G. L.], p. 82-83 — **Nöther und Wirtinger.** Riemann's Ges. math. Werke. Nachträge [G. L.], p. 83-84. — **Czuber.** Wahrscheinlichkeitsrechnung. I. [P. Pizzetti], p. 84-89. —

Digitized by Google

H. Grassmann. Ges. Werke. II. Bd., II. Th. [G. L.], p. 89-90. — **Fouët.** Leçons sur la théorie des fonctions analytiques. I Partie [G. Vivanti], p. 90-92. — **F. Klein.** Anwendung der Diff.- und Integralrechnung auf die Geometrie [G. Vivanti], p. 102-109. — **E. Wölffing.** Mathematischer Bücherschatz I. [G. L.], p. 109-110. — **Hensel und Landsberg.** Theorie der alg. Functionen [B. Levi], p. 110-116. — **Meller.** Higher mathematics [G. L], p. 116-117. — **Study.** Geometrie der Dynamen. I. [E. Daniele], p. 118-122. — **Heinmüller.** Meth. Lehrbuch der Elementar-mathematik. III. [G. L.], p. 123-124.

NECROLOGIO.

P. G. Tait, p. 28-29.

NOTIZIE.

Biblioteca scolastica. — Documenti per la storia della matematica nel Medio Evo e nel Rinascimento. — Un' importante memoria di Abel. — Carteggio di Leibniz. — Congresso internazionale di scienze storiche. — Il III Congresso internazionale dei matematici. — Le benemerenze di J. P. de Gua de Malves. — Amici e corrispondenti di G. Galileo. — I documenti del processo di Galileo. — Nuovi modelli di geometria. — Programma di concorso, p. 29-32.

I premi dell' Istituto di Francia. — Ferdinando Caspary. — Un rapporto sui progressi recentemente fatti dall' analisi vettoriale. — Nuovi premi periodici. — Pubblicazioni in occasione del primo centenario della nascita di G. Bolyai (15 Dicembre 1902). — Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche, p. 62-64.

Congresso internazionale di scienze storiche. — Due temi di concorso. — Concorso al Premio Tenore. — Tema di matematica proposto dalla R. Accademia di Scienze e lettere della Danimarca. — Matematici napoletani. — Nicola Chuquet, p. 92-96.

Antonio Arnaud, il grande Arnaud, come matematico. — Tema proposto pel 1906 dall'Accademia delle Scienze di Berlino. — Un progetto bibliografico. — Progetto d' un' edizione internazionale delle opere di Leibniz. — Accademia Reale del Belgio. — F. Schweins e O. Hesse. — Influenza della tecnica sopra lo sviluppo della meccanica teorica. — Temi di concorso. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche. — Nomografia, p. 124-128.

Digitized by Google

ANNO VI. GENNAIO, FEBBRAIO E MARZO 1903.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7. 50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

G. VACCA. *Sopra un probabile errore di Gabrio Piola.*

Recensioni ed annunzi: G. LORIA. *Spezielle alg. und transcend. ebene Kurven* [U. Amaldi]. — *Opere matematiche di* E. BELTRAMI. I. [G. L.]. — R. FRICKE, *Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung* [G. Vivanti]. — G. HOLZMÜLLER. *Elemente der Stereometrie* [G. L.]. — N. GRASSI. *Elementi di Geometria descrittiva* [G. L.]. — F. RUDIO. *Die Elemente der analytischen Geometrie.* II. [G. L.]. — *Opere matematiche di* FRANCESCO BRIOSCHI. II. [G. L.]. — G. GALLUCCI. *Saggio d'introduzione alla filosofia delle matematiche* [G. Vailati]. — *Compte rendu du deuxieme Congrès international des Mathématiciens* [G. L]. — G. SCHEFFERS. *Einführung in die Theorie der Flächen* [G. L.]. — E. D'OVIDIO. *Geometria analitica* [G. L.]. — M. GODEFROY. *Théorie élem. des Séries* [G. L.]. — *Annuaire pour l'an 1903 publié par le Bureau des longitudes* [G. L.]. — F. AMODEO. *Elementi di geometria projettiva.* — HAMBURGER. *Gedächtnissrede auf I. L. Fuchs.* — *Sitzungsberichte der Berliner math. Gesellschaft.* — G. VIVANTI. *Lezioni sulla teoria della risoluzione delle equazioni di V grado.*

Necrologio. P. G. TAIT.

Notizie: Biblioteca scolastica. — Documenti per la storia della matematica nel Medio Evo e nel Rinascimento. — Un'importante memoria di Abel. — Carteggio di Leibniz. — Congresso internazionale di scienze storiche. — II III Congresso internazionale dei Matematici. — Le benemerenze di J. P. de Gua de Malves. — Amici e corrispondenti di G. Galileo. — I documenti del processo di Galileo. — Nuovi modelli di geometria. — Programma di concorso.

SOPRA UN PROBABILE ERRORE DI GABRIO PIOLA

(Sulla rettificazione della parabola e della spirale d'Archimede

Nota di G. VACCA

Nell'*Elogio* di BONAVENTURA CAVALIERI pubblicato da Gabrio Piola, a Milano nel 1844, è detto:

(P. 36).... « Credo meglio impiegato lo spazio di questa nota nel » far conoscere un insigne teorema del Cavalieri, da lui posto nel » VI libro della sua geometria. E ciò non tanto per rivendicarlo da » certuno che volle attribuirlo al geometra fiammingo Gregorio da

Digitized by Google

» S. Vincenzo (bastando a tal fine il dire che il libro di Cavalieri » comparve nel 1635 e quello di Gregorio da S. Vincenzo nel 1647) » quanto per rettificare il relativo passo di Montucla che a pag. 41 » nel tomo II della sua Storia, ne parla inesattamente..... ».

La prima parte del teorema che il Piola attribuisce a Cavalieri consiste nel far vedere che due convenienti archi di spirale d'Archimede e di Parabola « rettificati, si trovano della stessa lunghezza ».

Il Piola dice che nell'enunciato ha introdotto qualche cambiamento a fine di renderlo più evidente ed aggiunge che:

(P. 38).... « di rettificazioni di curve vi è qualche traccia nella » geometria degli indivisibili, in prova di che può valere la prima » parte dell'addotto teorema. Del resto che il Cavalieri studiasse nei » problemi di rettificazioni di curve e li trovasse difficili, appare anche » dalle lettere 23 settembre e 2 ottobre 1640 scritte al Rocca ».

Malgrado una attenta lettura del VI libro della geometria del Cavalieri, non ho potuto trovarvi nè il teorema, nè gli accenni che il Piola gli attribuisce relativi a rettificazioni di curve. Mi pare poco credibile che nè il Cavalieri, malgrado la sua modestia, nè i suoi contemporanei non abbiano rilevata, se fosse stata enunciata in quel libro, una scoperta tanto interessante. Ritengo probabile che il Piola non abbia fatto che correggere, senza verificare attentamente il testo di Cavalieri, l'inesatto enunciato di Montucla.

Parimenti inesatta mi sembra l'asserzione del Montucla laddove dice: (l. c.).... « un auteur moderne (le P. Castel) fait hommage de cette découverte à Grégoire de St. Vincent dont un livre entier roule sur ce sujet ».

L'*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* pubblicato da questo scrittore in Anversa nel 1647, contiene infatti un libro dedicato alle spirali. Però non aggiunge nulla a quanto fino dal 1635 aveva scritto Cavalieri, perchè sebbene egli dica:

(P. 668).... « spiralem esse ... evolutam sive expansam parabolam » e sebbene dica che una delle due curve *simbolizza* e *rappresenta* l'altra, o che ha la stessa *natura* dell'altra, non enuncia affatto la proposizione relativa all'eguaglianza delle lunghezze di due archi corrispondenti delle due curve.

La prima opera stampata in cui compare il primo enunciato preciso e la prima dimostrazione a noi nota relativa alla lunghezza dell'arco della spirale e della parabola, è l'*aritmetica infinitorum* di Wallis, pubblicata nel 1655 (opera t. 1), Wallis se ne attribuisce il merito:

(t. 1, p. 373) .... « Tota haec de longitudine lineae spiralis doctrina, » continuis quatuordecim propositionibus iam tradita, est, apud Archi- » medem in libro de lineis spiralibus, penitus omissa: nescio an ab » aliquo quopiam ex recentioribus tradita fuerit ».

Digitized by Google

E Wallis non si ferma qui, ma arriva, salvo la notazione, alla concezione ed ai metodi del calcolo infinitesimale. Ecco le sue parole: « (p. 379) *Methodus Rectam Parabolicae (vel etiam Paraboloeidicae) aequalem, quam proxime, invenire.*

« .... semiparabolam rectam in vertice contigat recta AT in » quotlibet aequales particulas divisa; (quarum quaelibet dicatur a, » atque numerus omnium n); et in singularum particularum terminis » ad tangentem illam totidem applicentur rectae, Parabolae dia- » metro propterea parallelae, et facientes ad Tangentem angulos » rectos TO, TO, etc., quarum minima dicatur 1 .... erunt illa ut » numeri quadratici 1, 4, 9, 16 &c. et earum differentiae ut 1, 3, 5, 7 &c. » numeri impares deinceps ab unitate (quarum differentiarum maxima » erit $2n - 1$).

» Rectae parallelarum illarum terminos (in linea Parabolica consti- » tutos connectentes, quae erunt propterea ipsi Parabolae deinceps in- » scriptae) erunt ut $\sqrt{:} a^2+1$, $\sqrt{:} a^2+9$, $\sqrt{:} a^2+25$, $\sqrt{:} a^2+49$, &c. » Quae quidem rectae (Parabolae inscriptae) quo plures fuerint, eo » propius ad parabolicae mensuram accedet earum omnium aggre- » gatum, ita tamen ut ex omnibus sic aggregata recta sit ipsa para- » bolica minor.

» Sin velit aliquis rectam juxta majorem (ut constet intra quos » cancellos determinare possit Parabolicae longitudinem); neque diffi- » cilis erit haec investigatio, tangentium ope perficienda.

» Si vero curva AOO, non supponatur parabola, sed paraboloeides » cubicale, biquadraticale, etc. idem processus erit, mutatis mutandis, » atque in Parabola ».

Non è difficile riconoscere in questo passo di Wallis che egli aveva capito benissimo che per rettificare la parabola occorreva eseguire l'integrale $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$, di cui egli ha una concezione nitida.

Pascal nella sua lettera del 10 Dicembre 1658 sopra l'*Égalité des lignes spirale et parabolique* (Oeuvres, Paris, 1889, t. 3, p. 450), dice:

« Il y a environ quinze ans que M. Hobbes crut que la ligne courbe » d'une parabole donnée était égale à une ligne droite donnée. M. de » Roberval ensuite dit qu'elle étoit égale à la ligne courbe d'une spi- » rale donnée; mais sans en donner de demonstration autrement que » par les mouvements, dont on voit quelque chose dans le livre des » hydrauliques du R. P. Mersenne, et comme cette manière de démon- » trer n'est pas absolument convaincante, d'autres géomètres crurent » qu'il s'étoit trompé... ».

« .... Cette diversité d'avis m'ayant étonné je voulus reconnaître » lequel étoit le veritable .... Je l'ai donc fait, et j'ai trouvé que » M. de Roberval avoit eu raison, et que la ligne parabolique et la

Digitized by Google

» spirale sont égales l'une à l'autre.... La démonstration est entière » et exactement accomplie, et pourra vous plaire d'autant plus qu'elle » est la seule de son espèce, aucune autre n'ayant encore paru, à » la manière des anciens, de la comparaison de deux lignes de dif- » férente nature.... ».

La dimostrazione che Pascal fa seguire alla sua lettera è limpidissima. Tuttavia essa è molto inferiore a quella di Wallis, nella quale ritroviamo l'origine dei metodi moderni del calcolo infinitesimale. Pascal e Fermat, malgrado il loro genio non erano allora in grado di apprezzarne l'enorme importanza.

Infine nel Dicembre 1657 Huygens scopriva che la rettificazione dell'arco di parabola si riduceva alla quadratura dell'iperbole. Egli tenne segreta la sua scoperta, che pubblicò per mezzo di lettere soltanto un anno dopo, come risulta dalla sua lettera a Carcavy del 16 Genn. 1659 (Oeuvres t. 2, p. 316). Questa lettera non ci è pervenuta integralmente. Il 31 Genneio 1659 (id. p. 334), Huygens seppe da Cl. Mylon che Auzout aveva scoperto la stessa trasformazione. L'enunciato di Huygens ci è conservato nella sua lettera del 7 Febbr. 1659 a Fr. Schooten (id. p. 344). Esso è una elegantissima interpretazione geometrica della formola:

$$\int_0^x \sqrt{(1+x^2)}\,dx = (x/2)\sqrt{(1+x^2)} + (1/2)\log[x+\sqrt{(1+x^2)}]$$

Da quanto precede mi sembra di poter concludere:

1.° Che la Geometria del 1635 di Cavalieri non tratta rettificazioni di curve: che però di tali problemi potrebbe darsi che Cavalieri avesse trattato nel suo epistolario purtroppo finora inedito, e forse dalle lettere del Cavalieri al Rocca, del 1640, citate dal Piola.

2.° Che Roberval nel 1643 era a conoscenza dell'eguaglianza dei corrispondenti archi di parabola e di spirale d'Archimede: ma anche la dimostrazione del Roberval non ci è pervenuta, nè ai suoi contemporanei parve soddisfacente.

3.° Che la prima dimostrazione precisa di questa proposizione, come pure la considerazione della rettificazione di un arco di curva parabolica quadratica, cubica, etc., si trova nell'*Arithmetica infinitorum* di Wallis del 1655.

4.° Che il libro di Wallis rimase inaccessibile per molto tempo ai suoi contemporanei, tanto che Pascal credette di averne dato nel 1658 la prima dimostrazione rigorosa.

5.° Che soltanto nel 1657 Huygens, per il primo, ridusse la rettificazione dell'arco di parabola o di spirale d'Archimede alla quadratura di un segmento di iperbole.

Genova, Novembre 1902.

Digitized by Google

RECENSIONI ED ANNUNZI

GINO LORIA. *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte.* Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von F. Schüter, Mit 174 Figuren auf 17 lithographirten Tafeln. Leipzig, B. G. Teubner, 1902, gr. 8; XXI + 744 S. [Prezzo del Vol. legato Mk. 28].

Dopo la diffusa e fervida attività del secolo scorso parve, in questi ultimi anni, delinearsi nel campo delle Matematiche una tendenza al raccoglimento e alla elaborazione; e a molti, non soltanto pensatori isolati ma interi e autorevoli istituti scientifici, si affacciò e si impose la opportunità di meditare sul cammino compiuto, di tirare le somme dei risultati conseguiti e di determinare i confini attuali dei domini conquistati. Così, da parecchi anni oramai, la Deutschen Mathematiker-Vereinigung si fa iniziatrice di Rapporti sui più importanti rami delle Scienze matematiche; così, sotto gli auspici delle Accademie di Monaco e di Vienna e della Società scientifica di Gottinga fu concepito il vasto disegno della *Enciclopedia;* e in accordo col piano e cogli scopi di questa fu dal Teubner, esempio insigne di editore sapiente e coraggioso, ideata la sua *Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften*, della quale, come V. Volume, fa parte l'opera, di cui io qui voglio tenere parola.

Già più d'uno aveva espresso l'idea che fosse oramai tempo di raccogliere, dalla immensa e sparpagliata letteratura, la storia e la teoria delle curve speciali conosciute, quando l'Accademia delle Scienze di Madrid mise a premio codesto tema dapprima pel 1894, poi, riuscito vano quell'invito, pel 1897. Appunto dalla memoria, cui fu conferito codesto premio, nacque quest'opera, che, sostanzialmente rifatta ed ampliata, si è, pochi mesi innanzi, presentata al pubblico matematico.

Dalle prime curve speciali, le cui origini si confondono colle origini stesse della Geometria, traverso i secolari tentativi di risolvere problemi classici e pressochè leggendari, nelle ricerche astratte suggerite dal genio geometrico e tra la folla sempre crescente dei problemi, che ai metodi della Geometria andarono sottoponendo le scienze meccaniche, fisiche e, in questi ultimi tempi, biologiche, si venne accumulando, nel campo delle curve particolari, un materiale così ampio, e, sopratutto, così vario per iscopi e per importanza e così complicato di legami molteplici, che non appare nè possibile, nè desiderabile di ordinarlo e classificarlo secondo un criterio unico e rigido. L'A. pre-

Digitized by Google

scelse la via più naturale e, ricorrendo alternativamente a un duplice punto di vista, geometrico e storico, riuscì a concepire per l'opera sua un piano semplice e chiaro. Escluse le curve sghembe — su cui giova sin d'ora attendere il promesso secondo volume — l'A. distingue anzitutto le curve piane algebriche dalle trascendenti, raggruppando le prime a seconda dell'ordine delle rispettive equazioni cartesiane; e poi, per ciascuna delle grandi divisioni, che così ottiene, distribuisce le curve in tanti gruppi coordinati, ciascuno dei quali è caratterizzato da una curva, da cui diramano tutte le sue generalizzazioni immediate o mediate e tutte le curve che, o per i loro caratteri intrinseci o per le loro proprietà formali, a quella sono affini. Ricostruite così queste discendenze di curve, fra loro storicamente parallele e geneticamente indipendenti, le dispone le une dopo le altre nell'ordine cronologico delle curve, da cui ciascuna di esse rispettivamente ripete la sua origine, e, seguendone il naturale sviluppo, le confronta e le ravvicina, rilevandone i punti di contatto e le eventuali diramazioni comuni. In questa guisa, mentre, per una parte, a chi segua ordinatamente tutto il vasto piano del libro si manifesta, da un punto di vista particolare ma non per questo meno interessante, l'intero svolgimento storico della Geometria, d'altro canto a chi intenda avere soltanto notizie di una speciale teoria è reso possibile ed agevole l'orientarsi e l'indirizzarsi, a seconda dei suoi scopi, nel dedalo delle ricerche sulle curve piane speciali.

La parte I (« *Luoghi piani e Luoghi solidi* ») tratta in forma, come è ben naturale, brevissima della *retta* (cap. 1) del *cerchio* (cap. 2) e delle *coniche* (cap. 3) e vi è notevole lo sguardo rapido, ma concettoso, che l'A. dà alla storia di queste ultime linee da Menecmo ad Apollonio, dal Kepler al Desargues, dal Fagnano allo Steiner.

Nella Parte II, dedicata alle « *Curve del terz'ordine,* », i primi tre capitoli si rivolgono alle generalità. Nel cap. 1, dopo avere accennato alle forme canoniche dell'equazione delle cubiche e alla loro rappresentazione parametrica generale, l'A. espone la classificazione del Newton, aggiungendovi la nomenclatura del Newman, e definisce tre famiglie di curve del terz'ordine, che non rientrano nel quadro dei capitoli successivi. Dopo essersi occupato, nel secondo e terzo fra questi, delle cubiche *razionali* e delle *circolari*, passa allo studio delle curve del terz'ordine speciali, cominciando da una già nota ai Greci, cioè dalla *Cissoide* di Diocle (cap. 4), alla quale riattacca le molteplici sue generalizzazioni: *Cissoide obliqua*, curve *cissoidali* dello Zahradnik, *Cissoidi generali* dello Strassnitzky e del Peano, *Ofiuride* dell'Uhlhorn (cap. 5). — Da un problema ideato dal Descartes a mettere alla prova i suoi metodi nacque la cubica nota sotto il nome

Digitized by Google

di *Parabola cartesiana* od anche *Tridente di Cartesio* (cap. 6), ed origine analoga ebbe il *folium Cartesii*, il quale diede luogo, in tempi vicini a noi, a generalizzazioni in vario senso (cap. 7). — Ideate già prima del 1650 da un matematico francese (forse il Roberval, secondo un' ipotesi dell'A.) le *Strofoidi* (cap. 8), dopo essere state oggetto di uno studio inedito di Guido Grandi e di Evangelista Torricelli, rimasero un secolo nell'oblio; ma poi, specialmente nella prima metà del secolo scorso, furono l'oggetto di molte e varie ricerche, che rivelarono le eleganti proprietà di questa notevole famiglia di curve, da cui trassero origine le *Panstrofoidi* (secondo la denominazione dell'A.), le *Strofoidi generalizzate* del Cesàro e del Piquet, le *Strofoidali* del Barbarin, le *Strofoidi generali* di W. W. Johnson (cap. 9). — Due brevi capitoli (10, 11) assegna l'A. alla *Concoide* del de Sluse (la cui origine risale, come per la Strofoide, alla metà del sec. XVII e che come quella è una curva del terz' ordine circolare) e alle cubiche razionali tangenti alla retta all' infinito, fra cui compare la cosidetta *curva di Rolle*. Del terz'ordine e razionale è pure la *Versiera* (capitolo 12), che si suole a torto attribuire a M. G. Agnesi, mentre ricerche recenti di G. Vacca dimostrano che essa appartiene al Grandi: a codesta curva l'A. ravvicina la *Visiera* del Peano, simile a quella per forma, ed una curva, che fu dal Longchamps erroneamente identificata colla Versiera e che perciò l'A. chiama *Pseudo-versiera*. — Nei due ultimi capitoli di questa Parte (13, 14) sono studiate le curve del terz'ordine, che furono ideate a risolvere i classici problemi della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo e che già non trovarono posto, come la Cissoide di Diocle, nei capitoli precedenti: noto la cubica trisettrice del Mac Laurin colla generalizzazione del Cramer, le trisettrici del Catalan e del Longchamps, la cubica duplicatrice dell'Uhlhorn e del Longchamps. Qui infine l'A. si occupa della *Foglia parabolica* di codesto ultimo geometra ed annovera alcune cubiche particolari, cui non fu assegnato un nome specifico.

La Parte III comprende le « *Curve del quart'ordine* ». Anche qui nel cap. 1 l'A., dopo avere riassunto le generalità sulle quartiche, tiene parola dei tentativi di classificazione dovuti all'abate Bragelongne, all' Euler e al Cramer, accenna alle classificazioni fondate sulla considerazione del genere o su criteri topologici ed enumera le quartiche del Clebsch, del Lüroth, del Geiser, del Caporali, dell' Halphèn e le omologico-armoniche, le quali tutte, pur essendo prive di punti multipli, sono speciali. I due capitoli seguenti (2, 3), pur essi di carattere generale, trattano delle *quartiche razionali*, fra le quali compare come quartica a punto triplo — il *Trifolio parabolico* del Longchamps — e delle *quartiche ellittiche* e *bicircolari;* e nel seguito sono passate in rassegna le quartiche speciali a partire dalle *Spiriche* di Perseo (cap. 4),

Digitized by Google

sezioni piane del toro circolare parallele all' asse di rotazione. — Trova quindi posto la *Concoide* di Nicomede, che, notoriamente, è al tempo stesso curva trisettrice e duplicatrice (cap. 5); e ad essa ravvicina l'A. le varie sue generalizzazioni (cap. 6): una curva recente dello Jerabek (che comprende come caso limite particolare anche la Strofoide) le Concoidi a base qualsiasi e fra queste, come concoide del cerchio, la *Lumaca* di S. Pascal. Accanto alla *Cardioide* l'A. studia le *Cardioidi stellate* del Cesaro, generalizzazioni intrinseche di quella (cap. 7), e, poichè la Cardioide è una quartica tricuspidale, riattacca qui lo studio della *Ipocicloide tricuspidale,* che è proiettivamente identica ad essa, e accenna alle proprietà generali delle curve del quart'ordine, aventi tre cuspidi. Dopo aver passato in rassegna un gruppetto di quartiche, cui si dà luogo considerando le podarie della Ipocicloide tricuspidale e fra le quali ricordo il *trifolio obliquo* del Longchamps (cap. 8), l'A. riprende l'ordine cronologico e si occupa delle *Ovali* di Cartesio (cap. 9), cui segue una schiera di *quartiche polizomali simmetriche* (cap. 10), fra le quali meritano particolare menzione le *Parabole virtuali* del P. Gregorio da S. Vincenzo (sec. XVII), rimaste come sepolte fra i laboriosi viluppi di un inutile tentativo di quadrare il cerchio, ma che si presentarono poi, in modo spontaneo, in ricerche del Huygens e di altri. — Da un problema proposto da Gerard von Gutschoven, scolaro e collaboratore del Descartes e poi professore di Anatomia, di Chirurgia e di Botanica a Lovanio, nacque quella curva *Kappa,* che è la più antica tra le forme speciali conosciute di *quartiche razionali con un punto di contatto di due rami* (cap. 11), fra le quali ricorderò le *quartiche piriformi* del Longchamps. Dopo un breve capitolo (12) sulle *Concali* e le *Cissoidi di quarto grado,* l'A. passa a trattare diffusamente delle *Curve del Cassini* (cap. 13), che in certo senso sono analoghe alle Concali, e della *Lemniscata* di Giac. Bernouelli (cap. 14), e, poichè quest' ultima curva è una quartica a tre punti doppi di inflessione, l'A. raccoglie qui alcune proprietà generali delle quartiche di codesta specie, considerando in particolare certe forme speciali note di esse, la Kohlenspitzkurve dello Schoute (così designata per la sua somiglianza col profilo dei due carboni di una lampada elettrica ad arco) e la Kreuzcurve dello stesso o *Trinodale armonica* del De la Gournerie. — Il cap. 15 è dedicato a due quartiche razionali circolari, una delle quali è la *Trisegante* del Delanges, e l'altra è una nuova *concoide,* che fra le curve può vantare il privilegio certamente unico, di essere stata ideata da un celeberrimo pittore, Albrecht Dürer; di essa l'A. dà per primo le figure delle tre sue forme tipiche. — Infine un brevissimo capitolo (16) su alcune quartiche, collegate alla teoria delle coniche, chiude questa ampia, ordinata ed esauriente rassegna delle curve speciali del quart'ordine.

Digitized by Google

Le « *Curve algebriche speciali di ordine superiore al quarto* » che formano l'oggetto della Parte IV, sono assai poco numerose, e noterò con l'A. che fra esse non ve n'ha nemmeno una di settimo ordine. Dopo avere accennato alle scarse ricerche di indole generale, cui furono sottoposte codeste curve, l'A. enumera le quintiche conosciute (cap. 1), delle quali nessuna ricevette un nome particolare e che tutte si connettono alla teoria delle coniche, e ad esse aggiunge le curve speciali del sesto ordine, che ebbero un'origine analoga. Il gruppo delle sestiche é veramente notevole: l'A. lo studia, cominciando dalle *Astroidi,* generate come *Olistoidi* (Glissettes) di un segmento di data lunghezza mobile cogli estremi su due rette non parallele, e dagli *Scarabei,* podarie delle Astroidi (cap. 2). Alle Olistoidi appartiene (avendo come base due cerchi) anche la *curva di Watt* (cap. 3), accanto alla quale l'A. considera la sestica tricircolare, che il Roberts ottenne come generalizzazione di quella e a cui egli diede il nome di *Threebarcurve.* Al sesto ordine appartengono ancora la *Nefroide* del Freeth, che conduce alla costruzione dell'ettagono regolare, e l'*Atriftaloide,* presentatasi con altre curve allo Haugthon nello studio della superficie dei mari (cap. 4); e qui l'A. raccoglie altre curve del sesto e dell'ottavo ordine nate da problemi astronomici e la *Cranioide,* incontrata dal Poncelet e poi dal Burmester nello studio delle ombre delle elicoidi. Dopo un breve capitolo (5) sul *Trifolio pratense* e sulla *Cornoide,* sestiche entrambi, l'A. chiude questa Parte collo studio della interessantissima famiglia di curve del Krimphoff, cui dà luogo una rappresentazione geometrica delle funzioni lemniscatiche, e in particolare si ferma a considerare le curve di codesta famiglia degli ordini nono e venticinquesimo, le quali sono entrambi razionali.

Estremamente vario e abbondante è il materiale raccolto nella Parte V, dedicata alle « *Curve algebriche speciali di ordine qualsivoglia* », le quali per la massima parte debbono la loro origine, in generale recente, ad una estensione della definizione di curve già incontrate prima d'ora. Dopo una breve introduzione sull'ordinamento adottato e un cenno sulle *Curve modulari* (cap. 1), l'A. considera le curve cui condusse la generalizzazione della *equazione* delle coniche, nelle sue varie forme canoniche: *Parabole e iperbole d'ordine qualsivoglia* (cap. 2, 3), *Perle* (cap. 4), *Curve di Lamè* e *triangolari simmetriche* del *De la Gournerie* (cap. 5), e dopo queste raggruppa, come dovute a generalizzazione di *proprietà geometriche* delle coniche, le *Curve polizomali* del Cayley (cap. 6) e le *Curve del Darboux* e le *equilatere di P. Serret* (cap. 7). — Cercando una definizione geometrica di curve, che rendessero la forma di rose a più petali giunse G. Grandi alle sue *Rodonee* (cap. 8), cui l'A. riattacca, per

Digitized by Google

l'origine analoga, le *Foglie geometriche* dello Habenicht (cap. 9); e allo stesso gruppo delle curve, di cui fu determinata l'equazione in base alla forma per esse prefissata, appartengono ancora le *Ovali* del Münger e le *Curve triangolari* dell'Euler, alla cui determinazione si giunge agevolmente considerando le rispettive evolute o *Curve orbiformi* (cap. 10). — La generalizzazione dei due classici problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo diede origine ad una serie notevolissima di *Curve moltiplicatrici e mediatrici* (cap. 11) e di *Curve settrici* (cap. 12), che qui l'A. studia per ordine di tempo. — Passa quindi alle curve algebriche, che ammettono trasformazioni in sè stesse: *Curve algebriche che hanno centri o assi di simmetria* (cap. 13), e *Curve autopolari e anallagmatiche* (cap. 14); e, dopo uno studio diffuso delle *Rhizic curver* del Walton o curve algebriche equipotenziali (Geometria dei polinomi) (cap. 15), espone in un gruppo di capitoli, che sono fra i più notevoli dell'opera, le ricerche sulle curve, la cui rettificazione da funzioni di natura prefissata, passando ordinatamente in rassegna le curve, la cui lunghezza d'arco si esprime per mezzo di archi di parabola, di cerchio e di iperbola (cap. 16), di ellisse (cap. 17) e di lemniscata (cap. 18). — Un ultimo capitolo (19) è dedicato alle curve, che il Lissajous ha incontrato nello studiare il problema dei nodi nelle lamine vibranti.

Nella Parte VI sono raccolte le « *Curve trascendenti speciali* ». Nella introduzione (cap. 1) l'A., dopo aver fatto cenno dei tentativi, riusciti vani sin qui, di raccogliere le curve trascendenti conosciute sotto un unico corpo di dottrina analogo alla teoria delle curve algebriche, stabilisce sulle tracce del Fouret le definizioni fondamentali dei sistemi a due caratteristiche di curve algebriche o trascendenti; e passa quindi alla rassegna delle curve trascendenti speciali, cominciando da quelle due, la cui scoperta risale a Geometri greci, cioè la *Quadratrice di Ippia e Dinostrato* e la *Spirale di Archimede* (cap. 2, 3). Alla prima di queste egli riattacca le altre quadratrici scoperte in tempi più recenti: la *Quadratrice* del Tschirnhausen, la *Cocleoide* e la *Quadratrice dell'iperbola* del Perks; e, così, alla teoria della Spirale di Archimede fa seguire lo studio delle varie sue generalizzazioni: *Spirali di ordine superiore, Spirale del Galilei* e *Spirale parabolica* (cap. 4) e, a completare il quadro delle spirali algebriche, dopo avere esposte alcune generalità su codeste curve, si occupa della *Spirale iperbolica* e del *Lituo* del Côtes. Un gruppo distinto di spirali è costituito dalla *Spirale logaritmica* e da altre spirali trascendenti che da esse derivano (cap. 6); e, poichè il fatto che la spirale logaritmica ha curvatura inversamente proporzionale alla lunghezza dell'arco condusse a ricercare le curve, per cui invece fra curvatura ed arco vi è proporzionalità diretta, l'A. si occupa qui della *Clotoide*, che è definita ap-

Digitized by Google

punto da codesta ultima proprietà (cap. 7). — Già la Quadratrice di Ippia e Dinostrato e la Spirale di Archimede sono suscettibili di una definizione cinematica; qui l'A. passa a studiare sistematicamente un gruppo notevolissimo di curve, che ammettono una definizione di tal natura e tratta della *Cicloide* (cap. 8), delle *Epicicloidi*, *Ipocicloidi* ed *Evolventi del cerchio* (cap. 9), delle *Pseudocicloidi* (cap. 10), delle *Trocoidi* in generale (cap. 11) con riguardo speciale alle Trocoidi dell'ellisse (*Curve del Delaunay e di C. Sturm*) e infine delle *Curve sintrepenti* e in particolare *delle isotrepenti* (cap. 12). — Riprendendo quindi l'ordine cronologico, l'A. considera la curva risolutrice di un problema proposto dal Debeaune al Descartes e che ha uno speciale interesse storico, perchè presenta il primo esempio di un problema di « calculus tangentium inversus ». A problemi di natura analoga debbono la loro origine le curve del *Ribaucour* (cap. 14), le *Spirali* del Norwich o dello Sturm e le curve dell'Euler (cap. 15). — Dopo un breve esame delle curve cui dà luogo la rappresentazione delle funzioni trigonometriche e logaritmitiche (cap. 16, 17) e un cenno sulle curve che qui vengono dette *straordinarie* (curve prive di tangente, curve che riempiono un'area, ecc.), l'A. studia le linee di Klein e Lie (cap. 19) e quelle di Mercator e Sumner (cap. 20), e passa quindi in rassegna un ampio gruppo di curve, che egli chiama *fisico-matematiche*, perchè ciascuna di esse risponde a un problema fisico: *Trattrici* (cap. 21), *Catenarie* (cap. 22), *Curva elastica*, *Isocrona paracentrica* e *Curva meridiana del solido di rivoluzione di minima resistenza* (cap. 23), *Erploidi* e, in particolare, *Spirali del Poinsot* (cap. 24) e, da ultimo, altre curve, presentatesi in questioni magnetiche, elettromagnetiche e biologiche (cap. 25).

Nella Parte VII ed ultima sulle « *Curve derivate* » sono esposte alcune trasformazioni e costruzioni geometriche, le quali permettono di dedurre da ogni curva data una nuova curva; così dopo un riassunto generale sui metodi di trasformazione fondati sul cambiamento di coordinate (cap. 1), vi si trovano le *Curve di inseguimento* (cap. 2), le *Evolute ed evolventi* (cap. 3), e le loro generalizzazioni (cap. 4), le *Curve parallele* (cap. 5), le *Radiali* (cap. 6), le *Caustiche* (cap. 7), le *Podarie*, *Contrapedali* e *Podoidi* (cap. 8), le curve *isottiche* e in particolare *ortottiche* (cap. 9), le curve *differenziali* e *integrali* (cap. 10), le curve *opposte* (cap. 11) e infine alcune curve, che si deducono non da una curva unica, ma da un insieme di curve (cap. 12).

A concludere il libro e quasi a raccogliere le file di una tela così vasta e complessa, l'A. qui da ultimo si volge a dare uno sguardo storico allo sviluppo della teoria delle curve piane, e da questa sintesi veramente limpida ed efficace passa ad abbozzare la sua *Teoria delle*

Digitized by Google

curve panalgebriche (1). Egli designa con tale nome le curve integrali di equazioni differenziali del primo ordine, algebriche non solo rispetto alla derivata, ma anche alla funzione incognita e alla variabile; e mostra come per esse, in base a codesta definizione, si possa svolgere tutta una serie di interessanti proprietà, che generalizzano nel modo più semplice le proprietà fondamentali delle curve algebriche. Sono curve panalgebriche, salvo scarsissime eccezioni, tutte le curve trascendenti conosciute; onde a me sembra lecito affermare, che qui, anzichè un primo tentativo di coordinamento del materiale conosciuto, come modestamente si esprime l'A., si abbia già l'inizio di una teoria organica e generale. Anzi si potrebbe forse desiderare che l'A., nel concepire il piano della Parte relativa alle curve trascendenti, avesse desunto dalla sua teoria delle curve panalgebriche i criteri ordinatori. Ad ogni modo giova avvertire esplicitamente che egli non vi ha mai tralasciato di far risaltare per ogni singola specie di curve quelle proprietà, per cui esse hanno o no natura panalgebrica; ed anzi le considerazioni, di cui egli ha in quella Parte largheggiato, relative ai sistemi algebrici a due caratteristiche, ai quali, per la massima parte, quelle curve appartengono, danno alla trattazione caratteri di interesse e, spesso, di novità, veramente degni di nota.

Lo schema secondo cui è svolto lo studio di ciascuna curva o famiglia di curve è sistematicamente uniforme: precedono i cenni storici, e rapida ma persuasiva è la critica sulla origine delle singole curve e sulla priorità nella relativa scoperta: talvolta le inclinazioni del ricercatore di documenti spingono l'A. sulla via di discussioni minute, non per altro soverchiamente prolisse; perchè ben presto egli se ne ritrae e dall'esame comparativo delle varie eventuali definizioni della curva in parola passa a studiarne le proprietà, raggruppandole e condensandole in pochi enunciati salienti, cui fa da ultimo seguire i risultati metrici relativi alle rettificazioni e alle quadrature.

Il materiale addirittura immenso, che è raccolto in quest'opera, è reso facilmente reperibile e, per così dire, maneggevole da due indici, l'uno di nomi propri, l'altro di argomenti, e da un sommario analitico dei paragrafi diffuso e completo; nè va passata sotto silenzio la ricca serie di tavole, in cui con cura e precisione veramente mirabili sono delineate in centosettantaquattro figure le curve più notevoli, di cui è tenuto parola nel libro.

La redazione è sobria ed efficace, salvo qualche rara disuguaglianza, che farebbe desiderare in alcuni punti una maggiore concisione, e in altri, dato il pubblico ampio di lettori presso cui il libro troverà favore, una minor parsimonia di indicazioni e di schiarimenti.

1) Cfr. G. LORIA. *Le curve panalgebriche.* « Mem. della R. Soc. delle Sc. di Praga, 1901 » e « Le Matematiche pure ed applicate, t. II, 1902 ».

Digitized by Google

Ma queste ultime impressioni, di cui non mi nascondo il carattere soggettivo, non possono oscurare il giudizio, che, fuor d'ogni dubbio, è dovuto a quest'opera, nella quale l'A., fondendo in sè, in modo forse più felice che in ogni altra occasione, il duplice ufficio di storiografo e di geometra, ha saputo armonicamente contemperare le doti rigide di ordine sistematico, che sono richieste a un Repertorio, coi caratteri più larghi e più complessi di una Storia comparata di sì vasto dominio scientifico.

Appunto per questa doppia sua natura, l'opera potrà avere un'azione notevole anche nella Scuola. I Corsi di Geometria analitica del piano, alquanto irrigiditi nel tipo tradizionale di teoria delle sezioni coniche, troveranno qui tracciata e facile la via a distendersi in vario senso, accogliendo in sè la teoria di qualche altra famiglia di curve, che uniscano alla eleganza delle proprietà la importanza delle applicazioni. E poichè l'A. volle dedicata la sua opera alla memoria di Eugenio Beltrami, forse non parrà qui fuor di luogo il voto, che i nuovi cultori delle Matematiche, ricercando ad ora ad ora questa antologia geometrica di geniali spedienti e di ravvicinamenti industriosi, di applicazioni feconde e di generalizzazioni fortunate, educhino in sè quel senso sereno di eleganza e quell'attico gusto di euritmia, dei quali, non meno nella questione geometrica particolare che nell'ardua e profonda speculazione di filosofia naturale, sempre quel Grande si compiacque.

Carpaneto (Piacenza), Ottobre 1902.

UGO AMALDI.

Opere matematiche di EUGENIO BELTRAMI. *Pubblicate per cura della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma.* T. I. Milano, U. Hoepli, 1902, 4.° p. XXII + 437 [Prezzo L. 25].

La Facoltà di Scienze della R. Università di Roma per onorare nel modo più degno la memoria di Eugenio Beltrami, non appena avvenuta la di lui irreparabile perdita, iniziò una pubblica sottoscrizione e coi ricavati di essa pose le basi alla edizione di cui oggi annunciamo il I volume. Pel formato e pei caratteri tale edizione è identica a quelle delle *Opere* del Brioschi; è così splendida che fa onore tanto all'Hoepli che ne è editore, quanto alla Tipografia matematica di Palermo che la eseguì. Ma essa differenzia da quella pei criterî con cui essa venne condotta. Anzitutto venne fortunatamente abbandonato il criterio di distribuzione adottato dagli editori di Cauchy e Brioschi, e venne invece scelto l'ordine cronologico, per ogni rispetto preferibile a qualunque altro: della qual cosa va dato somma lode ai Prof.ri Cremona, Tonelli e Castelnuovo, che presiedettero alla presente

Digitized by Google

pubblicazione. Approvazioni altrettanto unanimi e cordiali temiamo essi non riscuoteranno per essersi allontanati dal sistema di riproduzione diplomatica, da molti ritenuto preferibile ad ogni altro; e le critiche al sistema di libertà adottato non potranno certo mancare da parte di chi osserva che, in conseguenza di esso, vennero mutilate le *Annotazioni alla teoria delle cubiche gobbe*, di cui non venne riprodotta la parte polemica, che pur lumeggia un episodio di storia moderna, oggi dimenticato, ma che fu un giorno così clamoroso da avere un' eco nella *Commemorazione* che dello Steiner fece il Geiser. Delle traduzioni di cui vennero onorate alcune delle memorie del Beltrami è fatto cenno dagli editori; crediamo però non essere siffatte indicazioni complete; onde consiglieremmo di adottare il procedimento adoperato nell' edizione delle opere di Lejeune-Dirichlet, cioè di inserire al termine dell' ultimo volume un elenco completo delle traduzioni in parola.

Una bella riproduzione fotolitografica del ritratto ad olio, fatto dal Prof. Pittarelli dell' illustre estinto, e la ristampa della bellissima Commemorazione fattane dal Prof. Cremona rendono ancora più prezioso il volume annunziato.

G. L.

R. Fricke. *Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt.* Dritte umgearbeitete Auflage. Braunschweig, Vieweg, 1902. XV+218 p. 8.° [Prezzo Mk. 5; legato Mk. 5.80].

Questo eccellente libro, compilato in origine per gli studenti del Politecnico di Braunschweig, ricompare ora in forma tale da poter avere un uso assai più esteso; e noi vorremmo che venisse tradotto in italiano, perchè potessero approfittarne gli studenti delle nostre Università. Esso è una specie di riassunto d' un corso di Calcolo infinitesimale, contenente essenzialmente tutte le definizioni, i teoremi, le regole di derivazione, i metodi d' integrazione; le dimostrazioni talvolta sono omesse, tal altra accennate od esposte per esteso.

Il Fricke dice che il suo libro può considerarsi come l' esplicazione del programma per l' insegnamento del Calcolo nei Politecnici da lui esposto nella prefazione alla traduzione tedesca del *Calculus for engineers* di Perry, di cui abbiamo parlato (v. *Bollettino*, T.V, 1902, p. 122-124), e coglie l' occasione per fare una punta contro quei critici i quali vorrebbero una assoluta *aritmetizzazione* anche nei libri di matematica destinati ai Politecnici. Se per aritmetizzazione si vuol intendere il mantenimento del rigore logico, chi scrive si onora di essere, sia pure in ultima linea, nel numero di quei critici. E, del resto, che il

Digitized by Google

Fricke medesimo riconosca non essere necessario rinunciare — come altri autori fanno — al rigore per ottenere facilità e chiarezza, lo prova questo libro stesso, dove egli, pur limitando la trattazione a quelle che egli chiama *funzioni elementari*, ha cura di enunciare sempre le condizioni restrittive sotto le quali sono validi i vari teoremi. Dopo ciò che abbiamo scritto ripetutamente su questo argomento, è quasi superfluo il dire che, se col Fricke *teorico* non consentiamo in tutti i punti, col Fricke *pratico* ci troviamo in pieno accordo.

Il presente libro è diviso in cinque parti, contenenti rispettivamente i principii del Calcolo differenziale, le sue applicazioni, i principii e le applicazioni del Calcolo integrale, la teoria delle funzioni di più variabili e la teoria delle equazioni differenziali ordinarie. Un'appendice tratta delle funzioni di variabile complessa.

G. VIVANTI.

G. HOLZMÜLLER. *Elemente der Stereometrie.* Leipzig, Göeschen. 8.°, I, 1900, p. XI+383; II, 1900, p. XV+477; III, 1902, p. XII+333; IV, 1902, p. XI+311. [Prezzi dei quattro volumi: *in brochure*, Mk. 6, 10, 9, 9; legati Mk. 6.60, 10.80, 9.80, 9.50].

Il lettore che ricorda che negli *Elementi di Euclide* tre soli e dei più brevi fra i tredici libri che li formano siano consacrati alla geometria dello spazio domanderà stupito come mai si possano scrivere quattro volumi di *Elementi di stereometria*, comprendenti più di millecinquecento pagine. Ma la sua meraviglia non sarà di lunga durata; essa tosto scomparirà quando gli avremo detto che sotto la denominazione di « stereometria » l'A. raccolse tutte le proprietà delle figure a tre dimensioni e tutti i metodi per studiarle: così, non solo i soliti poliedri noti negli elementi, ma tutte le figure limitate da piani; non solo il cono, il cilindro e la sfera, ma anche molte superficie algebriche e trascendenti; e, per indagare le prerogative di siffatte figure, egli ricorse, non solo ai metodi classici che l'antica Grecia ci ha trasmessi, ma anche a considerazioni infinitesimali e alle rappresentazioni nel metodo di Monge od in prospettiva (*disegno stereometrico*, secondo la nomenclatura dell'autore). Ebbe così vita un'opera, fondata sopra ripetute e svariate esperienze fatte in differenti scuole, e di apparenza diversa da tutte quelle di più antica data e che certo non può surrogare alcuno dei trattati ben noti a tutti; un'opera accessibile soltanto ad alcuni pochi eletti fra gli studenti, ma che tutti indistintamente i professori delle nostre scuole medie dovrebbero tenere costantemente sul loro tavolo di lavoro, non foss'altro perchè rappresenta una miniera inesauribile di applicazioni e di esercizî

Digitized by Google

sulle più importanti teorie e perchè, con opportune ricchissime citazioni, dà notizia di fiorenti dominî oltre quelli descritti o percorsi.

Il sostanzioso nutrimento che l'opera dell' Holzmüller assicura a chi la legge disarmerà i critici propensi a muovere qualche appunto all'ordinamento della materia, appunto che l'A. stesso sembra prevedere (quando dichiara nella prefazione al suo I vol. la sua opera piuttosto un saggio metodico che una esposizione sistematica completa) e che verrà probabilmente evitato nelle edizioni seguenti, che indubbiamente attendono quest' opera poderosa. La stessa considerazione indulgente varrà a far perdonare certe argomentazioni usate dall'autore (ad es. quelle connesse al così detto *principio di Cavalieri* e alle *regole di Guldino*), le quali non possono venire riguardate per legittime da coloro che ritengono non doversi per alcun conto discostarsi dalla retta via che tracciarono Euclide ed Archimede.

Anzi a questo proposito è indispensabile ricordare due cose. Una si è che in Germania, mentre nell' analisi il rigore, portato sino agli estremi limiti, sembra essere regola di procedere costante, per quanto concerne la geometria invece si sembra essere più disinvolti e corrivi. L'altra è che, coll'ausilio di metodi un po' disinvolti, l'A. è riuscito a porgere dimostrazioni elementari di certe formole che, non potendosi stabilire rigorosamente se non servendosi del calcolo infinitesimale, venivano prima di lui semplicemente enunciate in alcune scuole professionali, ove è necessario insegnarle a cagione delle loro applicazioni: ora, sia pure che certi ragionamenti dell' Holzmüller non equivalgano a complete dimostrazioni, essi vanno però lodati da chiunque preferisca mezza prova a nessuna prova.

I fautori della geometria infinitesimale sintetica troveranno nell'opera dell' Holzmüller argomenti a favore delle loro idee predilette, mentre gli oppositori saranno costretti a ravvisare in essa una testimonianza della sua potenza e duttilità; è quindi probabile che essa darà luogo a polemiche interessanti ed utili. Il *Bollettino*, per indole sua pacifico, non può prendervi parte: esso si limita ad adempiere il proprio compito segnalando ai propri lettori un' opera coscienziosa ed utilissima, e tracciandone i lineamenti. Al che valga l'indice seguente:

VOLUME I. *Teoremi e costruzioni.*

1. Generalità sulla posizione dei piani o delle rette nello spazio.
2. Disegno stereometrico dei principali poliedri e fondamenti della geometria projettiva.
3. Geometria dei poliedri.
4. Cilindri a coni circolari retti.
5. Sfera.

Digitized by Google

6. Recente geometria della sfera. Applicazioni alle ciclidi di Dupin ed alla curvatura delle superficie.
7. Sezioni coniche e cilindriche; applicazioni alla prospettiva di una sfera ed alle ombre della stessa.
8. Superficie di rivoluzione; in particolare quella avente per meridiano una conica.
9. Quadriche in generale.

VOLUME II. *Calcolo di aree e volumi.*

1. Prismi e cilindri.
2. Coni circolari retti, piramidi triangolari e poliedri regolari.
3. Poliedri irregolari ed alcuni corpi ad essi collegati e limitati da superficie curve.
4. La sfera.

VOLUME III. *Studio e misura di alcune figure più complicate.*

1. Le regole di Guldino per solidi di rivoluzione, superficie di rivoluzione e in generale per figure a tre dimensioni (1).
2. Le superficie elicoidi, la loro applicabilità sopra superficie rotonde, la loro connessione con le regole di Guldino per le superficie e la loro rappresentazione conforme sul piano e su altre superficie.
3. L'inversione applicata alle eliche ed alle superficie elicoidi. Osservazioni sulle trasformazioni e sui gruppi di trasformazioni.
4. Superficie tubulari generalizzate; loro inverse.

VOLUME IV. *Continuazione delle ricerche più elevate.*

1. Regola di Simpson e rappresentazioni conformi; applicazioni di esse al calcolo di lunghezze, superficie e volumi. Momenti di varî ordini.
2. Applicazioni dei precedenti metodi di calcolo a le quadriche ed altre figure ad esse collegate.
3. Ulteriori sviluppi concernenti il catenoide, la pseudo-sfera e l'elicoide d'area minima.

Un particolareggiato indice per materia ed un indice dei nomi sono preziosi complementi dell'opera dell'Holzmüller.

G. L.

(1) All'A. sembrano essere sfuggite le note di G. Koenigs *Sur la distribution des volumes engendrés par un contour fermé dans un mouvement quelconque* (Comptes rendus, T. CVI, 1888) il cui tema ed i cui risultati coincidono con quelli della I. Parte del III Vol.

Digitized by Google

N. GRASSI. *Elementi di geometria descrittiva per uso della R. Accademia Navale e dei RR. Istituti Tecnici*, con 58 tavole contenenti 337 figure. Livorno, S. Belforte 1901, p. VI+264 [Prezzo L. 8].

Nella I^a^ Parte di questo manuale sono esposti i fondamenti del metodo di Monge con applicazione allo studio ed alla rappresentazione delle principali figure geometriche limitate sia da linee rette e superficie piane, che da curve e superficie qualunque. Nella II invece sono gettate le basi del metodo dei piani quotati, dell'assonometria e della projezione centrale: quest'ultimo metodo si suole di consueto premettere a quello della doppia projezione, ma senza ragioni di serietà imperativa; chè se la *projezione centrale*, nel senso della Geometria projettiva, è, in ultima analisi, la base del metodo di Monge, questo razionalmente e storicamente è indipendente dalla *projezione centrale* nel senso della Geometria descrittiva ordinaria. La III Parte fa conoscere le varie specie di prospettiva e gli elementi della teoria delle ombre.

Le illustrazioni delle teorie esposte, attinte dall'architettura navale, renderanno ben accetti questi *Elementi* ai futuri ufficiali dell'armata; ma esse non sono così numerose da renderli inservibili ad altre categorie di studiosi. Ai quali poi gli *Elementi* stessi riusciranno simpatici per la forma piana in cui sono redatti e per le numerose belle figure di cui vanno adorni.

G. L.

F. RUDIO. *Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium*. Mit zahlreichen Uebungsbeispielen. II Teil. *Die analytische Geometrie des Raumes*. Mit 12 Figuren im Texte. III verbesserte Auflage. Leipzig, B. G. Teubner, 1901, 8.° p. X+186 [Prezzo del vol. legato Mk. 3].

Le doti di semplicità, chiarezza e rigore, che assicurarono un ottimo successo alla *prima parte* di questo trattatello (v. *Bollettino* T. III, 1900, p. 50), si trovano in eguale misura nella *seconda parte*, di cui due edizioni vennero esaurite in meno di dodici anni. Essa va senza esitazione raccomandata per un primo studio della geometria analitica dello spazio, anche perchè corredata di una bella collezione di quasi 500 esercizi. — Per indicare qualche particolare del metodo di esposizione adottato segnaleremo la considerazione costante della « direzione di una retta », quella delle due distinte regioni in cui qualunque piano divide lo spazio circostante e l'uso della « rappresentazione sferica » di una superficie (la quale, fra l'altro, mena rapidamente alle formole fondamentali della trigonometria sferica). — Ottimamente

Digitized by Google

inspirato fu l'A. nell' insegnare la rappresentazione analitica delle curve gobbe o delle superficie mediante uno o due parametri. Altri giudichi se quanto egli dice sulla rappresentazione delle curve nello spazio mediante due equazioni non possa far nascere qualche legittimo dubbio in chi ritiene dovere le equazioni di qualsia luogo geometrico essere soddisfatte dalle coordinate *di tutti e soli i punti* del luogo stesso.

Riguardo ai limiti posti alla materia trattata diremo che, oltre la retta ed il piano, sono studiate la sfera, l'elica cilindrica e le quadriche definite mediante le loro equazioni ridotte.

G. L.

Opere matematiche di Francesco Brioschi. Pubblicate per cura del Comitato per le onoranze a Francesco Brioschi (G. Ascoli, V. Cerruti, G. Colombo, L. Cremona, G. Negri, G. Schiaparelli). Tomo Secondo. Milano, U. Hoepli, 1902. 4.° p. VIII+456 [Prezzo L. 25].

Ricordando ai nostri lettori quanto dicemmo (*Bollettino*, T. IV, 1901, p. 85) riguardo ai criterî che vennero scelti nell' organizzare la presente edizione, nell' annunciarne il secondo volume basterà che diciamo essere in esso contenute quarantacinque memorie, tratte tutte dagli *Annali di Matematica*.

G. L.

G. Gallucci. *Saggio d'introduzione alla filosofia delle matematiche.* Caltanissetta 1902, 8.° p. 125.

È la prima parte di un' opera sistematica, che l'A., ha in animo di scrivere e colla quale egli si propone di fornire una guida, o un mezzo d' orientamento, a quei matematici che intendessero prendere cognizione di ciò che, nel campo della filosofia, si è pensato o scritto sui principî e sui metodi della loro scienza.

Dell' opportunità di un lavoro di questo genere, e del vantaggio che da esso potrebbe derivare, qualora esso fosse ben eseguito, pochi saranno certamente i matematici che non siano convinti.

L'A. tuttavia non sembra essersi reso completamente conto delle difficoltà che l' esecuzione d' un tale lavoro presenta e delle condizioni a cui esso dovrebbe soddisfare per servire veramente allo scopo suddetto.

Ciò che a lui nuoce sopratutto è la persuasione, altrettanto ferma quanto ingenua, che le ricerche sulla « filosofia delle scienze » in generale, e sulla « filosofia delle matematiche » in particolare, abbiano avuto il loro inizio col Kant, e che lo studio delle opere di questo

Digitized by Google

filosofo sia più atto di quello delle opere di alcun altro, antico o moderno, per fornire ai matematici le cognizioni filosofiche che loro occorrono e le idee più chiare e più generali sulla natura dei processi logici di cui essi si servono, e dei principî da cui essi prendono le mosse.

Da tale persuasione egli è indotto a trascurare affatto di occuparsi non solo dei grandi pensatori greci (ai quali spetta incontestabilmente il merito di avere per i primi tentato un analisi delle operazioni fondamentali di definizione e di deduzione che concorrono a costituire il procedimento caratteristico delle scienze matematiche), ma anche di quelli tra i grandi filosofi moderni che, essendo stati nello stesso tempo anche grandi matematici, come Descartes, Pascal, Leibniz, hanno, in certo modo, un maggior diritto a essere interpellati sulle questioni che si riferiscono alle relazioni tra matematica c filosofia, o al carattere e alla portata di quei metodi matematici che essi stessi hanno contribuito a creare e di quelle verità che essi stessi hanno scoperto, o, per i primi, dimostrate e riconosciute come conseguenze di altre più evidenti o più semplici.

A fermare di preferenza la sua attenzione sulla filosofia Kantiana e sull' insieme delle speculazioni filosofiche posteriori che ad essa si riconnettono, l' A. sembra inoltre essere stato indotto da un concetto, non solo esagerato, ma anche, a mio parere, radicalmente erroneo, dell' influenza da quella esercitata sullo sviluppo dei recenti indirizzi di analisi critica dei principî della geometria.

È forse in questo punto, più che in qualunque altro, che all' esposizione dell'A. si applica la qualifica che egli stesso non dubita di attribuirle, di essere cioè « fatta alla buona e quindi ben lungi dall' avere il carattere di serietà richiesto dall' argomento » (pag. 30).

Io vorrei domandare all'A. con quali fatti egli potrebbe giustificare la sua asserzione che « la teoria Kantiana dello spazio si connette intimamente colle ricerche di geometria non-euclidea » mentre, come è noto, e come era del resto già stato osservato anche da Gauss in una sua lettera frequentemente citata, il risultato di tali ricerche, ponendo in luce la possibilità di altre « geometrie » egualmente compatibili coll' esperienza, e indipendenti dall' ammissione di alcuni dei postulati tradizionalmente accettati, e fondate anzi sulla negazione di alcuno fra essi, si presenta in diretta contraddizione coll' idea che Kant si faceva della « *apodiktische Gewissheit, das ist, absolute Nothwendigkeit* » di tali postulati (V. *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik* §§. 6) e col carattere che egli ad essi attribuiva di condizioni indispensabili per rendere l' esperienza « possibile » o per metterci in grado di « costruirla ».

Per ciò che riguarda poi le più recenti ricerche sui fondamenti

Digitized by Google

del calcolo infinitesimale e sulla generalizzazione dei concetti elementari dell'algebra e della teoria delle operazioni, io vorrei che l'A. mi indicasse quale influenza esercitò il pensiero di Kant su quello del Bolzano, al riconoscimento dei cui meriti tanto nocque, e per tanto tempo, l'essersi egli trovato in contrasto colle prevalenti tendenze della speculazione filosofica rappresentata dagli epigoni del Kant, e quale traccia d'influenza Kantiana si riscontra nelle opere del Grassmann, il quale, direttamente ed esplicitamente, si riattacca al Leibniz e alle sue geniali intuizioni sulla possibilità di estendere alla geometria i vantaggi di una notazione simbolica analoga a quella che, per le varietà a una dimensione, è rappresentata dall'algebra ordinaria.

Gli appunti che si potrebbero ulteriormente muovere al presente volume per ciò che riguarda la forma estremamente sconnessa e disordinata, le troppo frequenti ripetizioni e le digressioni, che non sempre sembrano a proposito, sono prevenuti dall'A. colla dichiarazione (a pag. 120) che tale disordine fu da lui « appositamente voluto » come atto a condurre gradatamente il lettore dalle idee più semplici alle teorie filosofiche più difficili.

È da augurarsi che a raggiungere questo intento egli si serva, nella prosecuzione del suo lavoro, di mezzi alquanto più adeguati, per quanto possano essere meno facili e possano richiedere maggior sforzo di elaborazione della materia trattata.

Una piccola modificazione, d'indole filologica, che mi permetto d'indicargli, è quella di non trascrivere il termine tecnico Kantiano « *Noumenon* » con « *numeno* » ma bensì con « *noumeno* » conformandosi alle regole ordinariamente seguite nella trascrizione italiana dei nomi greci.

G. Vailati.

Compte Rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 Août 1900. Procès-Verbaux et Communications publiés par E. Duporcq. Paris, Gauthier-Villars, 1902. 8.° gr., p. 455 [Prezzo fr. 16).

Nell'annunziare la comparsa del bel volume contenente gli atti del secondo congresso matematico internazionale, non possiamo a meno di deplorare che esso siasi fatto attendere per due anni. Tale lamento non è soltanto il riflesso della legittima curiosità, che per sì lungo tempo ha tormentato coloro a cui non fu concesso di prendere parte ai lavori di quella solenne adunanza di dotti, ma della osservazione che molte delle cose che quel volume contiene giunsero già per altra via nel dominio dei matematici. Ciò era d'altronde agevolmente prevedibile; chè l'umanità procede oggi alla ricerca del vero a passo di corsa e

Digitized by Google

chi attende due anni a documentare mediante la stampa i propri diritti di proprietà rischia con tutta probabilità di vederli misconosciuti o negati. Possa questa osservazione, non dettata che dal desiderio di riuscire utile, servire di monito amichevole agli organizzatori dei futuri congressi!

La parte sostanziale del volume in esame risulta dalle *comunicazioni* fatte da coloro che parteciparono alla riunione. Parecchie di esse, come potevasi prevedere, hanno lo scopo di dare notizia preventiva di lavori venturi o di compendiare e divulgare risultanze già stabilite. Tali sono gli scritti dell'Amodeo *Sopra le curve algebriche dal punto di vista delle loro gonalità*, dell'Autonne *Sui gruppi d'ordine finito contenuti nel gruppo lineare quaternario regolare*, del Capelli intorno a *Le iper-aritmetiche e l'indirizzo combinatorio dell'aritmetica ordinaria*, del Galdeano *Sulla critica in matematica*, di H. von Koch *Sulla distribuzione dei numeri primi*, di M. d'Ocagne *Sulla nomografia*, del Padé *Sui recenti sviluppi della teoria delle frazioni continue*, di F. J. Vaes *Sopra i solidi regolari e semi-regolari* e del Veronese intorno *I postulati della geometria nell'insegnamento*. Semplici voti vennero manifestati dal Maillet e dal Méray: quello a favore della pubblicazione di certe informazioni bibliografiche, questi in pro dell'*Esperanto*. La *Nota* del Fujisawa *Sulla matematica degli antichi Giapponesi*, fa desiderare più estese informazioni sull'argomento, dalle quali risulti, non solo quanto lavoro matematico siasi compiuto dai popoli dell'estremo Oriente, ma anche se e quali influenze occidentali questi possono avere subite; invece la comunicazione del Gallardo sopra *Le matematiche e la biologia*, dà notizia delle applicazioni sino ad oggi fatte alla zoologia ed alla botanica, non di veri e propri procedimenti matematici, ma piuttosto di metodi statistici.

Fra le comunicazioni più elaborate ed estese sopra argomenti speciali segnaleremo quelle di A. Padoa sopra *Un nuovo sistema irriducibile di postulati per l'algebra* e sopra *Un nuovo sistema di definizioni per la geometria non euclidea*, le quali rappresentano l'indirizzo italiano degli studi sopra i fondamenti logici delle scienze esatte; delle altre ci è forza limitarci a trascrivere qui il semplice titolo: Hancock, *Osservazioni sopra i sistemi modulari del Kronecker;* Perrier, *Sul covariante risolvente della forma binaria del* 5.° *ordine:* Dickson, *I sistemi noti di gruppi semplici ed il loro interisomorfismo;* Artemas Martin, *Metodo per calcolare il logaritmo di un numero* e *Metodo rigoroso per trovare dei biquadrati la cui somma sia un biquadrato;* Tikhomandritzky, *Sull'annullarsi delle funzioni* θ *a più variabili;* Mittag-Leffler, *Sopra un'estensione della formola di Taylor;* Jahnke, *Nuovi sistemi ortogonali per le derivate delle funzioni* θ *a due variabili;* Drach, *Sopra gl'integrali completi delle*

Digitized by Google

equazioni a derivate parziali con due variabili; Lovett, *Sulle trasformazioni di contatto fra rette e sfere;* Macfarlane, *Applicazione dell' analisi spaziale alle coordinate curvilinee;* Stringham, *Trasformazioni ortogonali nello spazio ellittico od iperbolico;* Jamet, *Sul teorema di Salmon relativo alle cubiche piane;* Boccardi, *Osservazioni sul calcolo delle perturbazioni proprie dei piccoli pianeti;* Hadamard, *Sulle equazioni a derivate parziali a caratteristiche reali;* Volterra, *Sopra le equazioni a derivate parziali.*

Mentre queste *comunicazioni* per la specialità e varietà dei temi che trattano interesseranno questa l'uno e quella l'altro de' nostri lettori, le *conferenze* attrarranno l'attenzione di tutti. Infatti a tutti riuscirà dilettevole ed utile il seguire M. Cantor quando espone le proprie idee *Sulla storiografia delle matematiche* e V. Volterra quando, esaminata l'opera scientifica di Brioschi e Betti e Casorati, assurge a considerazioni generali sui tre modi principali sotto cui possono considerarsi le questioni d'analisi; l'apprendere da un matematico di primo ordine (il Poincaré) quale sia *L'ufficio dell'intuizione e della logica nella investigazione matematica* e dal Mittag-Leffler alcune idee ed opinioni del Weierstrass, consegnate nel carteggio che questi tenne con Sofia Kowalewski. A nessuno poi sfuggirà la capitale importanza della splendida conferenza dell' Hilbert *Sui problemi matematici futuri;* essa è così profonda e suggestiva che basterebbe da sola ad assicurare al volume che esaminiamo un posto eminente nella letteratura scientifica. Tale scritto, che ivi si presenta sotto veste francese, venne già prima due volte pubblicato nell'originale tedesco ed è poi stato tradotto in inglese, onde tutto fa sperare che la sua benefica influenza si eserciterà su tutto l'universo matematico. Lo studio di esso va raccomandato ai giovani delle nostre Università; la versione francese che ne possediamo, rende superflua una italiana; ma sarebbe desiderabile che la prima venisse riprodotta in qualche nostro periodico, affinchè riuscisse più probabile che anche l'Italia partecipasse alle battaglie incruenti di cui l'Hilbert, da grande capitano, ha delineati gli scopi e tracciati i piani.

G. L.

G. Scheffers. *Einführung in die Theorie der Flächen.* Mit vielen Figuren im Text. Leipzig, Veit und Co. 1902, 8.° p. X + 518 [Prezzo Mk. 14].

Questo nuovo volume dell' egregio professore del Politecnico di Darmstadt rappresenta la seconda parte dell'opera di cui or fa un anno (v. *Bollettino,* T. III, 1901, p. 44-46) annunziammo gl' inizî. Mentre la *prima* sezione di essa ha per tema le proprietà infinitesimali delle serie

Digitized by Google

semplicemente infinite di punti, appartenenti o non ad un piano, la *seconda* concerne la geometria sopra una superficie qualunque; se in avvenire l'A. vorrà aggiungervene una *terza* avente per soggetto i sistemi di superficie e le coordinate curvilinee nello spazio, la letteratura matematica sarà in possesso di un nuovo pregevole trattato completo di geometria infinitesimale.

I criterî in base ai quali venne architettato il volume che oggi annunziamo sono sostanzialmente i medesimi che presiedettero alla redazione di quello che lo precedette, e lo stile di quello non differisce da quello che procurarono a questo accoglienze così generalmente festose: onde non è necessario di avere doti di profeta per predire al secondogenito la sorte bella che ebbe il primo.

Paragonata con le trattazioni più antiche dello stesso soggetto, l'opera dello Scheffers si ravvisa per più elementare, non solo pel programma più modesto che svolge e pei mezzi analitici che sfrutta, ma anche per lo stile meno conciso in cui è scritta, pei numerosi esempî addotti e per le molte accurate ed espressive figure di cui va adorna; fra queste vanno particolarmente notate quelle che illustrano la soluzione del problema (dallo Scheffers trattato con amore speciale) della rappresentazione di una superficie su di un piano.

L'opera stessa si distingue poi anche per l'applicazione vastissima ivi fatta di concetti, di metodi, di proposizioni dovute a S. Lie, in particolare per l'incessante considerazione delle superficie singolari generate da rette o curve di lunghezza nulla; anzi elaborando siffatte idee l'A. è giunto (v. pag. 229 e 243) a conseguenze interessanti su cui va fissata l'attenzione dei lettori.

Abbondanti e generalmente degne di fede sono le notizie storiche sparse per tutto il volume. Ci sia lecito però di ricordare come il Beltrami abbia scritto un magistrale riassunto storico della teoria delle superficie d'area minima, al quale attinse poi a larga mano il Darboux appunto nel passo che l'A. ricorda a pag. 257; non ripeteremo qui le ragioni (v. *Bibliotheca mathematica*, 3.ª Serie, T. II, p. 401-402) per cui a nostro avviso il nome del Beltrami abbia diritto di essere annesso a quel teorema sulla torsione delle asintotiche che reca di consueto il nome di Enneper, e piuttosto osserveremo che la rappresentazione sferica di una superficie era stata concepita da O. Rodrigues, prima che Gauss ne ponesse in luce tutta la fecondità.

Vanno ancora notate due piccole sviste *che l'autore stesso ha rilevate e corrette* dopo la pubblicazione del suo libro; e cioè: 1.º a pag. 226 devono sopprimersi i periodi che occupano le linee 11-7 dal basso (« Man findet..... zusammen »); 2.º a pag. 393, dopo la linea 9.ª va aggiunto « die bei Einführung neuer Parameter ungeändert bleiben ».

Digitized by Google

La ricca e ben ordinata collezione di formole, con cui chiudesi il volume, rende questo ancora più atto a fungere da *vade-mecum* per chi voglia proseguire gli studi sulla disciplina che lo Scheffers insegna ad ammirare ed amare (1).

G. L.

E. D'OVIDIO. *Geometria analitica. Terza edizione riveduta e corretta.* Torino, Bocca, 1903, 8.° pag. XVI+529. [Prezzo L. 12].

Quest'opera rappresenta, nella sua forma definitiva, l'insegnamento che l'illustre autore impartisce da circa un trentennio in una delle più affollate università d'Italia; onde non si commette esagerazione valutando a quattro migliaia il numero di coloro che furono da essa resi edotti dell'essenza del potente metodo cartesiano. È un'opera, quindi, così favorevolmente nota in Italia che ci sembra superfluo il dar notizia del suo piano e della sua fisonomia; possa il nostro cenno attirare su di essa l'attenzione degli stranieri che, spesso, trattando *come nuove* questioni ivi completamente risolute, mostrarono di ignorarne persino la esistenza!

La nuova edizione differisce dalla precedente per molti ritocchi nei particolari e per un giudizioso spostamento; cioè, l'antico capitolo, intitolato *Teorie ausiliarie* e contenente gli elementi della teoria delle forme lineari e quadratiche, è passato in appendice, e così non turba, con considerazioni algebriche, lo svolgimento della teoria dei luoghi di 1.° e 2.° grado nel piano e nello spazio.

Una cosa avremmo desiderato; ed è che l'autore avesse modificata la sua esposizione della teoria delle coordinate polari nel senso da noi indicato in alcune *Osservazioni* pubblicate nel T. XV (1899) del *Periodico di matematiche per l'insegnamento secondario* e di cui facemmo molte applicazioni nell'opera *Specielle algebraische und transscendente Kurven.* Questo desiderio appare tanto più giustificato ed esente da qualsia personalità notando che il medesimo procedimento di esposizione da noi caldeggiato sembra adombrato nella *Analytische Geometrie* (Leipzig, 1882, p. 52) del Baltzer, fatto questo che solo recentemente avvertimmo.

G. L.

(1) Siaci lecito aggiungere un'osservazione sopra un passo del Vol. I. A pag. 282 l'A. prova che *le sole superficie sviluppabili su un piano sono i coni, i cilindri e le superficie costituite dalle tangenti di una curva sghemba.* Ora conviene avvertire che questo teorema vale *purchè* si ammetta di considerare soltanto le superficie che in ogni loro punto hanno di regola un determinato piano tangente: avendo il Wiener (*Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, T. II, Leipzig, 1887, p. 29-35) offerto l'esempio di una superficie che è sviluppabile su un piano, quantunque non sia rigata.

Digitized by Google

M. GODEFROY. *Théorie élementaire des séries. Limites. Séries à termes constants. Séries à termes variables. Fonction exponentielle. Fonctions circulaires. Fonction gamma. Avec une préface de* L. SAUVAGE. Paris, Gauthier-Villars, 1903, 8.° pag. VIII+266. [Prezzo fr. 9].

L'A., già favorevolmente noto per una monografia sulla funzione Γ pubblicata due anni or sono, si è proposto con questo suo libro di fornire agli studiosi un trattato sopra la teoria delle serie corrispondente alle esigenze di rigore che ha la scienza moderna. E si può, senz'esitare, asserire che egli seppe completamente raggiungere il suo scopo. Le cure che egli pose nel raccogliere il materiale, nell'elaborarlo e nell'esporre le varie teorie sotto la forma più facile e corretta rendono accessibile ed utilissimo il suo libro a chiunque possiede gli elementi del calcolo infinitesimale; le esatte citazioni delle fonti e le numerose applicazioni indicate come esercizi serviranno di incentivo pel lettore ad ulteriori studî e gli somministreranno i mezzi per proseguirli. Qualcuno forse lamenterà che l'A. abbia escluso dal suo discorso le quantità immaginarie, rendendo così impossibile di stabilire certe relazioni fondamentali, quali sarebbero quelle esistenti fra la funzione esponenziale e le funzioni circolari, relazioni che hanno una profonda analogia con quelle fra le funzioni esponenziali e le iperboliche, di cui egli fa cenno. Altri lamenterà invece di non trovare nel libro che annunziamo le proposizioni fondamentali sopra i prodotti infiniti, le quali sembrano indispensabili per giustificare l'intervento (v. p. es. pp. 164, 198 es. 1°, 204) di siffatte espressioni analitiche. Ma sono queste lacune che forse l'A. rimedierà in occasioni, che è da augurarsi il favore del pubblico gli fornisca in un prossimo avvenire.

Percorrendo le pagine del libro del Godefroy, in cui tante belle formole sono stabilite con calcoli d'una perfetta eleganza, il nostro pensiero ricorreva quasi involontariamente alla I^a Parte dell'*Introductio in analysin infinitorum* di Eulero; e ci veniva fatto di felicitarci che alcuno fosse ritornato ai procedimenti di questo sommo, mostrando che essi, se hanno bisogno di essere resi più rigorosi, vanno tenuti in grande onore, anche in un'epoca, come la nostra, ove di regola si tende di sostituire ragionamenti a calcoli; essi infatti possono rendere inapprezzabili servigi a tutti coloro che li adoperanno con l'abilità dei grandi, dei quali il sig. Godefroy ha tanto opportunamente rievocato il ricordo.

G. L.

Digitized by Google

Annuaire pour l'an 1903 publié par le Bureau des longitudes. Paris, Gauthier-Villars 16.° p. VIII+668+53+10+4+34+38 [Prezzo fr. 1,50; franco 1,85].

Non ripeteremo per questo volume della celebre collezione pubblicato dall' Ufficio delle Longitudini le lodi che vennero tributate ai precedenti e che esso merita non meno di questi. Ma ci limiteremo a segnalare le « Notices scientifiques » di cui va adorno:

RADAU, *Etoiles filantes et Comètes.*
JANSSEN, *Science et poésie.*
» , *Sur les travaux exécutés à l'Observatoire du sommet du Mont Blanc.*
Discours prononcés aux funérailles de A. Cornu et H. Faye.

G. L.

Elementi di geometria projettiva. Appunti delle lezioni dettate nella R. Università di Napoli dal Prof. FEDERICO AMODEO. *2.ª edizione accresciuta e migliorata.* Napoli, L. Alvano, 1902, p. VII+488 [Prezzo L. 10].

Introduzione.

Parte Prima. Forme di 1.° ordine. I. Forme semplici. II. Elementi immaginari nelle forme semplici. III. Forme di 2.ª e di 3.ª specie.

Parte Seconda. Forme di 2.° ordine. I. Proprietà projettive delle forme di 2.° ordine ad una dimensione. II. Proprietà polari delle forme di 2.° ordine.

M. HAMBURGER. *Gedächtnissrede auf Immanuel Lazarus Fuchs (geb. am 5. Mai 1833, gest. am 26. April 1902). Gehalten im mathematischen Verein der Universität Berlin am 5. Mai 1902.* Mit dem Bildniss des Verstorbenen sowie einem Verzeichnis seiner Schriften. Leipzig und Berlin. B. G. Teubner, 1902, 8.° p. 16 [Prezzo Mk. 1].

Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft. I. *Jahrgang.* Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1902, 8.° p. IV+66 [Prezzo Mk. 2,40].

Contiene articoli di Hauck, Hensel, Kneser, Knoblauch, Lampe, Weingarten ed altri.

Digitized by Google

Lezioni sulla teoria della risoluzione delle equazioni di V grado, tenute nella R. Università di Messina dal Prof. GIULIO VIVANTI *e raccolte dagli studenti. Corso di Matematiche superiori dell'anno 1901-02.* Litogr. 4.° p. 156.

Introduzione. Teoria generale delle operazioni. Le sostituzioni lineari. Rappresentazione geometrica delle sostituzioni lineari sul piano e sulla sfera. Costruzione analitica dei gruppi di rotazioni. Rappresentazione sul piano dei gruppi finiti di rotazioni. Gruppi omogenei e forme invarianti. Teorie algebriche. Rappresentazione geometrica dell'equazione di 5.° grado; riduzione dell'equazioni principali all'equazione dell'icosaedro. Risoluzione dell'equazione del 5.° grado, e di quelle di 3.° e 4.° grado. Risoluzione dell'equazione dell'icosaedro.

NECROLOGIO

P. G. TAIT

Pietro Guthrie Tait nacque a Dalkeith vicino ad Edinburgo il 28 Aprile 1831. Esauriti gli studi elementari e secondarî, entrò, assieme a Clerk Maxwell, nell'Università di Edinburgo, donde uscì *senior wrangler* nel 1852. Due anni dopo ottenne il posto di professore di matematiche nel Collegio reale di Belfast, ove trovò nell'Andrew un collega che lo associò alle proprie ricerche fisico-chimiche sulla compressione dei gas. Ma, sin dall'anno prima, l'apparizione delle *Lectures of Quaternions* dell'Hamilton aveva segnato un marchio indelebile nella sua vita scientifica: chè da quell'istante egli ammirò il nuovo metodo e si propose di svolgerlo ed illustrarlo: i lettori che ricordano avere egli dedicato ad esso molte importanti memorie e due trattati (uno in collaborazione col Kelland) vedranno come egli abbia fedelmente mantenuto il preso impegno.

Quando nel 1860 il Forbes lasciò la cattedra di filosofia naturale, che occupava nell'Università di Edinburgo, il Tait fu chiamato a succedergli, quantunque fra i concorrenti si trovasse il Maxwell: tale carica egli tenne quasi fino alla morte, e così istruì nel sano geometrizzare un numero di discepoli che viene valutato a dieci migliaja.

Digitized by Google

Ricorderemo ancora che il Tait collaborò con William Thomson a quel *Treatise on natural Philosophy,* che fu detto « il libro dei *Principia* del Sec. XIX » e che gli studenti delle Università inglesi chiamano famigliarmente « T e T' »; inoltre egli, con alcune belle ricerche sopra le proprietà delle curve chiuse, arrecò notevoli progressi alla topologia delle linee piane.

Di altre investigazioni di fisica da lui compiute, come delle sue ammirabili qualità di popolarizzatore, non è il caso di fare qui più di un cenno fugace.

Nell'Aprile 1901 il Tait per ragioni di salute chiese ed ottenne il collocamento a riposo. Morì il 4 Luglio dello stesso anno: il giorno precedente la sua morte aveva eseguito dei calcoli sui quaternioni, argomento al quale aveva divisato di dedicarsi completamente, dopo di avere abbandonato l'insegnamento (1).

NOTIZIE

Biblioteca scolastica. — C. Alasia. *I complementi di geometria elementare.* Manuale Hoepli, p. XV+214, 1903. [I. Vettori. II. Generalità sui poliedri. III. Misura dei poligoni e dei poliedri. IV. Simmetria. V. Spostamento delle figure. VI. Omotetia. VII. Similitudine. VIII. Massimo e minimo in geometria. IX. Trasversali. X. Potenza d'un punto rispetto ad un cerchio, asse radicale, centro radicale. XI. Involuzione. XII. Polo e polare. XIII. Inversione. XIV. Le sezioni del cono].

H. Vollprecht. *Das Rechnen, eine Vorbereitung zur allgemeinen Arithmetik. Regeln und Formen des Rechnens. Vergleiche mit der allgemeinen Arithmetik und Hinweise auf Geometrie und Physik.* Leipzig und Berlin. Teubner, 1902, 8.° p. 44.

* * *

Documenti per la storia della matematica nel Medio Evo e nel Rinascimento. — Il testè uscito XIII Fascicolo delle *Abhandlungen zur Geschichte der math. Wissenschaften* contiene la seconda parte

(1) Per più minuti particolari si ricorra agli articoli necrologici di G. Chrystal pubblicato in *Nature,* 25 Luglio 1901, e di di A. Macfarlane, inserito nel Vol. XV (Juli 1902) della *Physical Review.*

Digitized by Google

del lavoro di M. Curtze di cui già tenemmo parola (v. *Bollettino*, T. V, 1902, p. 128). Essa comprende: I. La riproduzione (accompagnata da una fedele traduzione tedesca) della *Practica geometriae* di Leonardo Mainardi, dotto cremonese vissuto nella seconda metà del XV Sec.; di quell'opera si conoscono tre mss., uno attualmente in possesso della Biblioteca universitaria di Gottinga, gli altri che facevano parte della collezione Boncompagni; tutti vennero utilizzati dal Curtze. II. Un'opera anonima, scritta nel 1545, recante lo strano titolo: *Algebrae Arabis Arithmetici viri Clarissimi Liber ad Ylem Geometram praeceptorum suum*, e conservata nella Biblioteca di Gottinga; secondo le fondate congetture del Curtze, Yleo non sarebbe che Euclide; comunque, se può in alcuno sussistere dubbio riguardo alla personalità del maestro, non se ne può nutrire riguardo all'importanza dell'opera del discepolo per la storia dell'algebra (1).

* * *

Un'importante memoria di Abel venne di recente scoperta dal Prof. Mittag-Leffler e pubblicata, in occasione del centenario, nel T. XXVI degli *Acta mathematica*. È la seconda parte delle celebri « Recherches sur les fonctions elliptiques »; essa era, al pari della prima, destinata al *Giornale di Crelle*, ma per ragioni ignote, non venne accolta, nè in questo periodico, nè in alcuna delle edizioni delle opere complete del celebre norvegese. Essa forma con la prima un'opera di tale importanza che la sua pubblicazione immediata avrebbe subito assicurato ad Abel il posto di fondatore della teoria delle funzioni ellittiche.

* * *

Carteggio di Leibniz. — Il Vol. XIII (1902) del periodico polacco *Prace matematyczno-fyziczne* contiene la seconda ed ultima parte dell'epistolario di Leibniz col Kochanski, che segnalammo ai nostri lettori (v. *Bollettino*, T. IV, 1901, p. 127).

* * *

Congresso internazionale di scienze storiche. — Questa solenne adunanza di dotti (cfr. questo *Bollettino*, T. IV, 1901, p. 126), che non potè avere luogo nell'epoca prefissata, avrà luogo, sotto l'Augusto patrocinio di S. M. il Re d'Italia, nei giorni 2-9 del prossimo Aprile. Il Comitato organizzatore della Sezione VIII (Storia delle scienze ma-

(1) Le precedenti linee erano già scritte quando ci giunse il triste annunzio della morte del Curtze, avvenuta a Thorn il 3 Gennaio in seguito a un attacco di malattia di cuore; il dotto estinto era nato il 4 Agosto 1837.

Digitized by Google

tematiche, fisiche, naturali e mediche) è costituito dai Professori P. Blaserna, V. Cerruti, P. Giacosa, G. Loria e V. Volterra; le numerose adesioni ricevute e le importanti comunicazioni annunziate danno sin d'ora affidamento di un completo successo.

* * *

Il III Congresso internazionale dei matematici verrà tenuto a Heidelberg in principio di Agosto del 1904; il lavoro preparatorio venne già iniziato e procederà sotto la direzione del Prof. H. Weber.

* * *

Le benemerenze di J. P. de Gua de Malves vennero per molto tempo disconosciute; il grave errore da lui commesso col negare, nella sua opera principale (*Usage de l'Analyse de Descartes*, Paris 1740), l'esistenza delle cuspide di 2.ª specie, fece sì che persino Chasles non ne apprezzasse il valore. È merito di Brill e Nöther prima e del Cantor poi di avere rilevate le singolari qualità che essa possiede, in particolare di avere notato come al De Gua, non al Maclaurin, appartenga la scoperta del teorema « Ogni retta congiungente due flessi di una cubica piana taglia la curva in un terzo flesso ». A completare la riabilitazione del citato geometra francese P. Sauerbeck ha dedicato un prolisso lavoro (*Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves. Ein Beitrag zur Kurven-Dis kussion*) che riempie il XV fascicolo delle *Abhandlungen zur Gesch. der Math.* (Leipzig, Teubner, 1902). Esso varrà a soddisfare i desiderî di coloro che non possiedono l'opera originale (che è ormai una rarità bibliografica), ad aiutare chi la possiede nell'intenderne lo stile antiquato in cui questo è scritto, finalmente a porgere particolareggiate applicazioni del metodo cartesiano, utili specialmente a coloro che ne hanno da poco intrapreso lo studio.

* * *

Amici e corrispondenti di G. Galileo furono Alessandra Bocchineri « che fece palpitare di senile affetto il cuore sempre giovane di Galileo », ed i suoi due mariti Francesco Rasi e Giovanfrancesco Buonamici. Il Prof. Favaro ad essi ha dedicata una dotta comunicazione fatta al R. Istituto Veneto (*Atti*, T. XLI, Parte II, 1902), piena di nuovi particolari concernenti il celebre astronomo, i suoi amici, ed i suoi tempi.

Digitized by Google

∴

I DOCUMENTI DEL PROCESSO DI GALILEO vennero di recente esaminati dal Prof. Favaro, il quale, in un eruditissimo lavoro presentato all'Istituto Veneto (v. *Atti*, T. XLI, Parte II, 1902), ne ha narrato le fortunose vicende, ha ricordati coloro che prima di lui, più o meno completamente, li pubblicarono e ha dato ragione del metodo con cui verranno riprodotti nella edizione nazionale delle opere del celebre Pisano.

∴

NUOVI MODELLI DI GEOMETRIA. — La collezione Brill-Schilling di modelli di geometria da tempo ne conteneva (Serie IV. N. *a*, *b*, *c*, *d*) alcuni relativi alle cubiche gobbe, costruiti dal Lange. Ora essa si è arricchita di altri (Serie XXVIII, N. 6) confezionati dal Dr. Walther Ludwig e riferentisi, non solo alle curve del terz'ordine in genere, ma anche a quella speciale ellisse cubica (*Horoptercurve*, secondo la denominazione di Helmholtz) che s'incontra nell'ottica fisiologica. Va notata una radicale innovazione adottata dal Ludwig dietro consiglio del Prof. Schilling. Mentre finora si usava tracciare le curve mediante fili stesi sopra superficie di gesso, di legno o di altra materia opaca, ora vennero costruiti in celluloide i cilindri contenenti le curve considerate, il che permette di seguire l'andamento di queste comunque venga disposto il relativo modello. Per più minuti particolari rimandiamo alla monografia del Ludwig, *Die Horoptercurve, mit einer Einleitung in die Theorie der kubischen Raumkurve* (Mathem. Abh. aus dem Verlage mathem. Modelle von M. Schilling in Halle a. S., Neue Folge, N. 3, 1902).

∴

PROGRAMMA DI CONCORSO. — L'Accademia di Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli conferirà un premio di *lire mille* all'autore della migliore memoria che porterà qualche contributo notevole alla teoria invariantiva della forma ternaria biquadratica, preferibilmente per quanto riguarda le varie condizioni di spezzamento in forme inferiori.

Le memorie dovranno essere scritte in italiano, latino o francese ed essere inviate, anonime, al Segretario dell'Accademia non più tardi del 30 Giugno 1904.

Marco Bertolone, Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1903.

Digitized by Google

ANNO VI. APRILE, MAGGIO E GIUGNO 1903.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7.50. Numeri separati L. 2 caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

G. LORIA. - G. B. CARACCIOLI.

Recensioni ed annunzi: SCHOUTE, *Mehrdimensionale Geometrie* I [G. L.]. — TORELLI, *Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato* [M. Vecchi]. — RECEDA, *Lecciones de geometria metrica* [G. L.]. GEISSLER, *Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen* [G. Vivanti]. — HOLZINGER, *Aritmetica politica* [G. L.]. — GALLUCCI, *Saggio di una introduzione alla filosofia delle matematiche*. Risposta. [G. Gallucci]. — BARDEY'S, *Aufgabensammlung* [G. L.]. — BARDEY'S, *Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebr. Aufgaben* [G. L.]. — PASCAL, *Calcolo infinitesimale* [M. Chini]. — STOLZ UND GMEINER, *Theoretische Arithmetik* [G. Vivanti]. — FRIZZO, *De numeris*. Appendice [G. L.]. — SCHUSTER, *Geometrische Aufgaben* [G. L.]. — BURKHARDT UND MEYER, *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*.

Notizie: I premi dell'Istituto di Francia. — F. Caspary. — Un rapporto sui progressi recentemente fatti dall'analisi vettoriale. — Nuovi premi periodici. — Pubblicazioni in occasione del primo centenario della nascita di G. Bolyai. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche.

GIAMBATTISTA CARACCIOLI

SCHIZZO BIOGRAFICO

DI

GINO LORIA

Nel mio libro sopra le curve piane speciali (1) ed in altre occasioni (2) io ho fatto cenno d'una operetta di geometria, pubblicata nel 1740, non meritevole dell'oblio che da tempo la ricopre. Chi ne fu l'autore? quale fu la professione di questo? quali gli scritti? A tali questioni indarno si chiedono adeguate risposte al Poggendorff ed al Riccardi: al loro silenzio valgano a porre riparo le linee seguenti.

(1) *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven*, (Leipzig, 1902), p. 250, 266, 271, 318, 416, 427.

(2) V. questo *Bollettino*, T. V, 1902, p. 18.

Digitized by Google

Giambattista Caraccioli nacque a Napoli addì 29 Decembre 1695 (1) e, destinato alla carriera ecclesiastica, venne ascritto all'ordine de' Teatini. Dopo di avere insegnato filosofia nell'Istituto teatino della patria sua, nel 1723 passò Lettore di Teologia a Firenze e nel 1731 fu chiamato a Pisa per dettare logica e filosofia nell'Università già illustrata da Galileo, e tale ufficio egli tenne durante un decennio. Appunto verso il termine di tale periodo egli compose il lavoro di geometria a cui nell'esordio abbiamo fatto allusione (2), lavoro che compendia alcune lezioni da lui tenute nella Università di Pisa.

Per giudicare equamente tale scritto fa mestieri ricordare che dalla comparsa della *Géométrie* di Descartes (1687), oltre ai commenti di coloro che la ripubblicarono o tradussero, sulla geometria analitica era stato pubblicato un solo manuale, cioè il *Traité analytique des sections coniques* del marchese de l'Hôspital, a cui l'eleganza della forma, più che l'originalità dei concetti, assicurò uno straordinario successo. L'*Usage de l'analyse de Descartes* del de Gua — a cui un recente lavoro sembra promettere una nuova giovinezza (3) — apparve l'anno istesso in cui il Caraccioli diede fuori la sua opera. Ora mentre le fatiche del ben noto abate francese concernono esclusivamente le curve algebriche, quelle del teatino italiano abbracciano eziandio le trascendenti; mentre il primo, per iscopi geometrici, affinò lo strumento che ancora rozzo uscì dalle mani di Cartesio, il secondo ricorse all'algebra soltanto nelle circostanze e nella misura in cui ciò gli era indispensabile. Inoltre questi ampiamente e metodicamente applicò un concetto che ai suoi tempi era importante, quello cioè di aumentare il numero delle curve speciali generalizzando le equazioni rappresentatrici di quelle già note.

Premesso un breve esordio inteso a dimostrare quale e quanta utilità provenga a chi voglia indagare le leggi governatrici dei moti e delle forze dal conoscere le qualità delle curve, il Caraccioli espone (Cap. I) come queste traggano origine dai problemi locali (semplicemente indeterminati) e (Cap. II) quale ne sia la ripartizione [in *geometriche* (algebriche) e *meccaniche* (trascendenti)] proposta da Cartesio. Nel successivo egli entra veramente in materia: riassunte (Cap. III e IV) le proprietà essenziali delle coniche, il Caraccioli mostra come parabola, iperbola, ellisse e circolo siano ciascuna punto di partenza

(1) A. F. Vezzosi, *I scrittori de' Chierici regolari detti Teatini*, Parte Prima, Roma, 1780. p. 200-208.
Fabroni, *Historia Academiæ Pisanæ*, T. III. (Pisis, 1795, p. 220-222).

(2) Joannis Baptistæ Caraccioli, clerici regularis in Pisana Academia Publici Philosophiæ Professoris, *De lineis curvis liber* (Pisis, MCCXL), 8.°, 8 pag. non numerate + XII + 210. con 13 tav. lit.

(3) V. *Bollettino*, T. 1903, p. 31.

Digitized by Google

di una serie illimitata di curve aventi ordinatamente le equazioni seguenti:

$$y^{m+n} = a^m x^n, \quad x^m y^n = a^{m+n}, \quad y^{m+n} = \frac{a^m}{b^m}\left(b \pm x\right)^m x^n;$$

$$y^{m+n} = \left(a \pm x\right)^m x^n,$$

e di cui egli espone diffusamente molteplici proprietà. Similmente (Cap. V) partendo dalla cissoide di Diocle

$$y^3 = a x^2 - y x^2$$

si giunge alle curve d'ordine $m+1$

$$y^{m+1} = a x^m - y x^m$$

e dalla concoide di Nicomede

$$\rho - \frac{a}{\cos \omega} = l$$

alle curve algebriche

$$\rho^m - \left(\frac{a}{\cos \omega}\right)^m = l^m$$

Sorvoliamo sul Cap. VI — semplice illustrazione di un passo della *Géométrie* cartesiana — e notiamo che nel seguente il Caraccioli considera la nota *quadratrice geometrica* dell'Ozanam [1] come la curva che nasce applicando al circolo $z = \sqrt{2ax - x^2}$ la trasformazione $ax = yz$; applicandola invece all'iperbola equilatera $z = \sqrt{2ax + x^2}$ si giunge ad una nuova curva, che l'autore propone di chiamare *quadratrice iperbolica*, per distinguerla dalla *quadratrice circolare* dell'Ozanam.

Col Cap. VIII — relativo alla spirale archimedea ed a tutte quelle rappresentabili in coordinate polari mediante equazioni del tipo $\rho^{m+n} = a^m \omega^n$ — si penetra nel dominio trascendente; nel quale si rimane percorrendo il seguente, ove l'A. propone di considerare le infinite curve

$$\rho \frac{\cos \omega}{a} = 1 - \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^{\frac{m}{n}},$$

come generalizzazioni della quadratrice di Dinostrato (corrispondente all'ipotesi $m = n$); pure nel campo trascendente si aggira l'ultimo Cap., ove sono compendiate le proprietà delle altre curve: cicloidi ed epicicloidi, logistica e spirale logaritmica, e sinusoide (« cycloide dimidiata », secondo la nomenclatura dell'autore).

[1] Cfr. una mia nota in *Bibliotheca mathematica*, 3.ª Serie, T. III, 1902, p. 127.

Digitized by Google

Se si riflette che codesta opera del Caraccioli è anteriore di otto anni a l'*Introductio in analysin infinitorum* dell'Eulero (il cui II Vol. fu per molti anni il testo generale per lo studio della geometria analitica) non recherà meraviglia se esso valse ad accrescere l'estimazione in cui era tenuto l'autore presso i Reggitori dello Studio di Pisa ed a consigliarli a trasferirlo nel 1741 alla cattedra di Aritmetica ed Algebra e ad affidargli poco dopo gl'insegnamenti di Ottica, Catottrica e Diottrica. Con questi ultimi è probabilmente collegata l'opera *Gnomonice*, dal Caraccioli pubblicata a Pisa nel 1756 (in 4.°, pag. 104) e su cui non giova qui arrestarsi; mentre si connettono alle sue lezioni di matematica pura altre due pubblicazioni scientifiche che recano il suo nome e di cui ora diremo qualchecosa.

Quella di esse che è di più antica data (1) consta di dieci problemi varii per natura, importanza, interesse e difficoltà, risoluti con i metodi classici ed esposti con lo stile euclideo.

Il primo consiste nella costruzione di un *quadrilatero inscrittibile* determinato dai suoi lati; è noto che Carlo Emanuele di Savoja lo aveva proposto verso la fine del Sec. XVI al suo matematico e che questi riuscì a risolverlo (2); è pur noto che il Legendre l'ha popolarizzato esponendone ne' suoi *Éléments de géométrie* (3) una soluzione che può dirsi definitiva e perfetta; e che M. Chasles diede ad esso una certa celebrità dimostrando, nella Nota XII dell'*Aperçu historique*, che gl'Indiani se ne erano occupati e non invano.

Il Caraccioli — che sembra ignorare i suoi predecessori — lo risolve in modo diverso dal consueto; cioé, invece di calcolare direttamente una delle diagonali della figura cercata od il raggio del cerchio in cui essa è inscrittibile, egli calcola la lunghezza della perpendicolare calata da uno dei vertici sopra uno dei lati non passanti per esso.

Apparentemente analogo al precedente è il problema, di cui l'autor nostro fa cenno in seguito, di costruire un *quadrilatero circoscrittibile* di lati conosciuti; ma in realtà questo differisce sostanzialmente da quello per essere in generale impossibile, ma, se solubile, indeterminato.

Il secondo problema concerne l'ellisse; è biquadratico e viene risoluto con i procedimenti classici escogitati durante il periodo cartesiano.

Più umile è lo scopo del terzo; consiste cioè nel risolvere il sistema di equazioni seguente:

$$x^2 + y^2 - \left(x + y\right) = 78, \quad xy + \left(x + y\right) = 39.$$

(1) J. B. Caraccioli, clerici regularis in Publica Pisana Academia arithmeticæ et algebræ universæ, atque opticæ dioptricæ catoptricæ Professoris *Problemata varia mathematica. Accedit Examen machinæ motus perpetui* (Florentiæ, MDCCLV) 4.°, p. XVI + 136, con 10 tav. lit.

(2) J. B. Benedictis, *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber* (Aug. Taurin. 1585).

(3) Nota V.

Digitized by Google

Due facilissimi problemi locali portano i numeri quarto e quinto; sono risoluti uno da una parabola e da un' iperbola l' altro, curve di cui il Caraccioli trova e discute le equazioni. Più elevato ed interessante è il tema del Problema VI ove il Caraccioli vuole spiegare come mai due circoli di un piano, benchè siano rappresentati da due equazioni di secondo grado fra le coordinate cartesiane di un punto, non si taglino che in due soli punti. Il conseguente paradosso è degno di stuzzicare la curiosità dei geometri, onde il fine propostosi dal Caraccioli è indubbiamente notevole ed alto; ma per raggiungerlo erano necessarie ali ben più robuste di quelle di cui natura avevalo fornito. Onde egli si limita a notare come, cercando le ascisse dei punti comuni a due circoli, sempre si giunga ad un'equazione quadratica: in tal modo veniva stabilito il pieno accordo fra l'algebra e la geometria, ma il vero nodo della questione veniva rimosso, ma non sciolto; ed in tale stato doveva rimanere fino alla comparsa di Poncelet.

La costruzione delle normali condotte ad una parabola da un punto del suo piano forma oggetto della questione settima; mentre le due ultime sono problemi di inserzione che si possono enunciare come segue: « Per un punto di $\left\{\begin{array}{l}\text{una parabola}\\ \text{un cerchio}\end{array}\right.$ condurre una retta tale che il segmento di essa limitato dai punti d'intersezione di essa con la curva e $\left\{\begin{array}{l}\text{l'asse}\\ \text{un diametro}\end{array}\right.$ abbia una lunghezza data ». Il Caraccioli le risolve algebricamente, costruendo poi graficamente le radici delle corrispondenti equazioni.

Nell'ultimo problema trattato il Caraccioli abbandona l'analisi finita per considerazioni infinitesimali; e — sotto il titolo *De solido cochleari* — porge un esauriente commento alle troppo laconiche pagine di chiusa dell'*Opera geometrica Evangelistæ Torricelli* (Florentiæ, 1644): se non c' inganniamo è questa la parte più interessante di tutto il verboso volume del Caraccioli testè analizzato.

Sopra tale argomento il Caraccioli è poi ritornato nell'ultima e più voluminosa delle sue opere (1): e cioè, nella prefazione alla seconda parte di essa, per replicare ad un' erronea interpretazione di alcune sue parole riferite nella *Storia letteraria d'Italia* (2), ed in appendice alla stessa, per esporre metodicamente le proprietà essenziali dell'elica cilindrica (cochlea) e delle figure generate dal moto elicoidale di una linea piana.

L' opera di cui testè si fe' cenno è un esteso trattato scolastico.

(1) *Geometria algebrica universa quantitatum finitarum et infinite minimarum tomi duo*, 8.°, Romæ, MDCCLIX.

(2) *Vol. XII dal Gennaio MDCCLV a tutto Giugno dell'anno medesimo*, (Modena, 1758) p. 78-80.

Digitized by Google

Il I Vol. (1) di essa concerne la geometria analitica a due dimensioni e sembra avere avuto come prototipo la *Géométrie* di Cartesio; chè, dopo una lunga introduzione sul calcolo algebrico e la teoria delle equazioni, contiene gli elementi della teoria dei luoghi geometrici con applicazioni alla costruzione grafica delle equazioni dei primi quattro gradi. Il II Vol. (2) tratta invece dell'applicazione del calcolo infinitesimale allo studio delle curve; il Caraccioli sembra esservisi accinto dopo avere studiati con profitto i patriarchi dell'analisi moderna, senza però riuscire ad imprimere alla sua esposizione una impronta moderna e a togliere ai metodi antichi i difetti che li deturpavano. Il suo stile è disadorno e pesante; quale differenza con la forma di cui il marchese de l'Hospital fornì il modello ai suoi conterranei e che questi apprezzarono a dovere e s'industriavano sempre di imitare! (3).

Questa produzione del Caraccioli — apparsa circa un decennio dopo quelle di Gaetana Agnesi (1748), Leonardo Eulero (1748) e Gabriele Cramer (1750) — ne sembra di data assai più remota; al loro paragone essa dovette apparire lavoro di altri tempi; venne quindi posta in disparte e nessuno pensò più a toglierla dagli scaffali delle biblioteche, tombe di tanti altri scritti, ben più meritevoli di considerazione.

Nel frattempo sembra che il Caraccioli abbandonasse l'insegnamento per tutto dedicarsi agli interessi dell'ordine a cui apparteneva ed ove conseguì i sommi gradi della gerarchia ecclesiastica; infatti nel 1756 i Teatini lo elessero loro Procuratore generale e tre anni dopo loro Preposito generale, e Clemente XIII Consultore dei Riti e poi (16 Febbraio 1761) Vescovo d'Aversa. Morì a Napoli sua patria nel 1765.

Vissuto nel secolo in cui il Fagnano ed il Grandi, i Manfredi ed i Riccati tenevano alto il decoro della patria nostra nelle palestre scientifiche, il suo nome non raggiunse la fama che altri più degni conseguirono; ma, per conservare la continuità ininterrotta della storia, va tenuto conto di chi servì di tramite non passivo ad idee dotate di riformatrice fecondità. D'altronde, chi ignora come la celebre dottrina di Carlyle degli « eroi » dello spirito umano sia stata di recente combattuta da una scuola che, esaltando l'opera assidua dei collaboratori modesti, proclamando la gloria degli « anonimi », attribuisce alle masse ogni progresso?

---

(1) *Geometria algebrica quantitatum finitarum*, p. 8+382, con 7 tav. lit.

(2) *Geometria algebrica quantitatum infinite minimarum; adjectus in fine est Commentarius de curva cochlea*, p. 6+287, con 11 tav. lit. — È strano che tanto il Vezzosi quanto il Fabbroni, non solo ignorano, ma negano l'esistenza di questo volume. Per compenso fanno cenno di alcuni scritti letterari o di erudizione del Caraccioli, che a noi non interessano.

(3) Leggendo quest'opera del Caraccioli si comprende la fama di oscurità che egli ebbe e di cui il Vezzosi, da storico imparziale, non mancò di far cenno.

Digitized by Google

RECENSIONI ED ANNUNZI

P. H. SCHOUTE. *Mehrdimensionale Geometrie.* I. Teil. *Die linearen Räume.* Mit 65 Figuren und 335 Aufgaben. (Sammlung Schubert XXXV). Leipzig, Goeschen, 1902; 8.° p. VIII + 295. [Prezzo del vol. legato Mk. 10].

In ogni nuova teoria matematica si possono in generale distinguere tre principali stadi di sviluppo. Durante il primo si accumulano gli elementi costituitivi, mediante ricerche originali, sparse in pubblicazioni indipendenti. Durante il secondo quegli elementi sembrano abbastanza numerosi per potere essere adunati in un tutto organico. Nel terzo finalmente la nuova disciplina appare per importanza e maturità propria a formare materia d'insegnamento, onde viene scelta a soggetto di opere didattiche. Ora la geometria a più dimensioni che, grazie a numerosi e valenti investigatori, attraversò già il primo stadio; che, grazie alla poderosa opera del Prof. Veronese raggiunse il secondo; per merito del Prof. Schoute (seguente in ciò l'eccitamento del Prof. Schubert) entra ora nel terzo. Abbiamo così implicitamente fatto noto che il lavoro, alla cui I Parte è consacrato l'articolo presente, è di natura didattica. Esso si dirige a quei giovani che, senza conoscere il calcolo infinitesimale, ma possedendo i fondamenti della geometria elementare, proiettiva, descrittiva ed analitica, desiderano apprendere metodicamente la geometria a n dimensioni *euclidea*. Questo carattere essenzialmente didattico riuscirebbe evidente, anche senza le dichiarazioni fatte in tal senso dall'A. nella prefazione, a semplice apertura di libro, osservando i numerosi esercizi sparsi per tutta l'opera e la collezione che la chiude. La conseguente struttura del libro riuscirà certamente poco gradita a chi è già provetto nella materia; ma è, senza dubbio, estremamente indicato per raggiungere il fine che si è proposto l'egregio Professore dell'Università di Groninga, cioè di rendere il suo lettore di muscoli abbastanza robusti per potere percorrere con rapidità e sicurezza tutti gli spazi lineari. Stante la novità del tema che tratta l'opera dello Schoute, crediamo opportuno descriverne il contenuto con larghezza un po' maggiore di quanto è nostro costume per le opere scolastiche.

§ 1. *Concetti fondamentali.* Nell'istessa guisa che dal movimento di un punto hanno origine le linee, così da quello di una linea nascono le superficie e da quello di una superficie il nostro spazio; estendendo questo procedimento vengono generate le varietà a 4, 5, ecc. dimensioni. Fra queste possiedono una importanza tutt'affatto speciale quelle

Digitized by Google

che sono la naturale estensione della retta e del piano: sono gli spazi lineari, i quali sono generabili per via ricorrente con un procedimento projettivo, ottenuto da Riemann generalizzando quello che serve a dedurre per proiezione il piano da la retta ed un punto esterno e lo spazio ordinario da il piano ed un punto esterno. Uno spazio lineare R_d a d dimensioni è definito o da $d+1$ punti o più generalmente da p spazi lineari di dimensioni $d_1, d_2, \ldots, d_p$ tali che sia $d_1 + d_2 + \ldots + d_p = d - p + 1$.

Posto $d+1 = w$ lo Schoute, per ricordare il numero dei punti determinatori di un R_d, propone di indicare questo anche con R_w, sistema che, malgrado le buone ragioni addotte dall'A., troverà oppositori in chi ritiene pericoloso l'usare due simboli ad indicare lo stesso ente. Due spazi lineari R_{d_1}, R_{d_2} si tagliano in uno spazio $R_{d_{12}}$ e determinano uno spazio R_d; sussiste allora la relazione $d = d_1 + d_2 - d_{12}$ (1). Da questo si traggono conseguenze importanti sulle intersezioni di 3, 4,... spazi non tutti indipendenti e sugli spazi da essi determinati.

§ 2. *Parallelismo.* Ammesso che lo spazio R_n in cui si opera sia euclideo, il luogo de' suoi punti all'infinito è un R_{n-1}; le proprietà di rette e piani paralleli si estendono allora immantinente a tutti gli spazi lineari che R_n racchiude; però le mutue posizioni in cui possono trovarsi due spazi lineari sono assai più svariate di quanto accade nello spazio ordinario. Inoltre, prese n rette uscenti da un punto, è possibile stabilire col loro mezzo un sistema di n coordinate per ogni punto di R_n, il quale sistema è la naturale estensione del sistema cartesiano (obliquo).

§ 3. *Ortogonalità.* Similmente si possono estendere allo spazio R_n le nozioni ed i teoremi su cui riposa la teoria ordinaria di rette e piani fra loro perpendicolari; si giunge così a stabilire l'esistenza di molte nuove posizioni scambievoli in cui si possono trovare due spazi lineari e a stabilire un sistema di coordinate cartesiane ortogonali.

§ 4. *Distanze, projezioni ed angoli*, sono concetti che quanto precede abilita ad estendere a spazi lineari qualunque.

§ 5. *Geometria descrittiva.* Date in R_n n rette a due a due ortogonali uscenti dallo stesso punto O, di un punto qualunque P si potranno considerare le n projezioni ortogonali su quelle rette, le $\frac{n(n-1)}{2}$ sue projezioni ortogonali sui piani che quelle rette a

(1) La dimostrazione datane dall'A. (p. 14) non sembra perfetta perchè non stabilisce l'indipendenza dei $d+1$ punti assunti a determinare l'R_d, nè che se due spazi R_{d_1} e R_{d_2} stanno in un R_d si taglieranno in un $R_{d_{12}}$. In conseguenza le osservazioni fatte a pag. 37-38 esigono qua'che ritocco.

Digitized by Google

due a due determinano, le $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ analoghe projezioni sugli spazi che le stesse individuano tre a tre, e così via. In particolare è utile considerare di P le $n-1$ projezioni sulla « catena di piani » $O(X_1, X_2)$, $O(X_2, X_3), \ldots, O(X_{n-1}, X_n)$; esse dànno origine ad un sistema di rappresentazione dei punti dello spazio che è la naturale estensione della geometria descrittiva nel senso di Monge. È una generalizzazione a cui senza dubbio molti avranno pensato, ma che, a quanto crediamo, è qui per la prima volta esposta con i necessari sviluppi. Lo Schoute nota anche come possa estendersi a tutti gli spazi il teorema di Pohlke e come in R_n esista un' assonometria e una prospettiva; era forse il caso di far qui cenno del « metodo della projezione centrale », che, da più di vent'anni, il Prof. Veronese ha esteso a spazi superiori, e che, fra l' altro, ha il vantaggio di potere venire esposto sotto forma che mostra essere desso in gran parte indipendente dall' ipotesi fatta sulla struttura dello spazio su cui operasi.

§ 6. *Geometria analitica.* Col mezzo del sistema di coordinate analogo al cartesiano dianzi definito, del concetto di proiezione e delle nozioni di parallelismo ed ortogonalità già stabiliti è agevole dimostrare un sistema di formule che corrispondono in R_n a quelle di cui componesi l'ordinaria geometria analitica del piano e dello spazio ordinario. Non ne descriveremo il contenuto; ma soltanto noteremo come l' identità sostanziale dei due problemi « trovare il punto comune a n R_n » e « risolvere un sistema di n equazioni di 1.° grado con n incognite » guidò l'A., coll'aiuto del metodo di geometria descrittiva antecedentemente esposto, a risolvere graficamente qualunque sistema determinato di equazioni lineari.

§ 7. *Geometria di posizione.* In R_n esiste una legge di dualità analoga a quelle che sussistono per le forme di 1.ª e 2.ª specie; essa è posta in evidenza sia dai postulati fondamentali della geometria in R_n, sia dalle formule di geometria analitica in coordinate omogenee. Similmente in R_n esistono, come in R_2 e R_3, due specie di trasformazioni projettive: la collineazione e la correlazione; esse vengono studiate dall'A. sia supponendo i due spazi considerati distinti, sia ammettendoli coincidenti, non senza escludere i casi particolari più notevoti che le stesse presentano: affinità, congruenza diretta od inversa, sistemi nulli, ecc.; nè sono taciute le più essenziali considerazioni sopra i movimenti in R_n.

§ 8. *Geometria numerativa.* Un R_d reale di R_n dipende da $(n-d)(d+1)$ costanti. Se è immaginario può essere di specie differenti; supposto di designare con R_{w_1, w_2} uno spazio immaginario R_{w_1} situato nello spazio reale R_w ed i cui punti reali costituiscono

Digitized by Google

un R_{w_1}, e con $c^{(w)}_{w_1, w_2}$, il numero delle costanti da cui esso dipende, lo Schoute prova anzitutto essere

$$c^{(w)}_{w_1, w_2} = c^{(w)}_{w_2, w_1} + c^{(w_1 - w_2)}_{w_1 - w_2, \, o}$$

e ne deduce

$$c^{(w)}_{w_1, w_2} = (2w_1 - w_2)(w - w_1) + w_2(w_1 - w_2).$$

Per risolvere altri problemi di geometria numerativa il nostro A. espone brevemente il principio di corrispondenza di Chasles ed il principio della conservazione del numero. Riguardo a questo, avverte che non è ancora stato dimostrato in generale, che, anzi, un esempio immaginato dallo Study (1) prova che non sussiste, almeno nella forma generale sotto cui viene di consueto esposto.

§ 9. *Poligonometria.* Quest'ultimo capitolo, a differenza dei due precedenti, è essenzialmente metrico. Lo Schoute vi studia anzitutto il « quadrispigolo », figura di R_4 analogo all'angolo triedro di R_3; e poi estende i risultati ottenuti ad R_n, applicandovi, non solo considerazioni geometriche, ma anche le formule già stabilite di geometria analitica. Qui sarebbe il caso d'intraprendere lo studio dei « politopi », cioè delle figure regolari di R_n; ma lo Schoute lo rimanda al prossimo volume, quasi ripetendo col poeta:

> Ma chi del canto mio piglia diletto,
> Un'altra volta ad ascoltarlo aspetto.

G. L.

Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato — Monografia di G. Torelli *— Opera premiata dalla R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche il 15 Dicembre 1900.* Napoli, Tipografia dell'Accademia, 1901, 8.° gr., p. VIII + 212 [Prezzo L. 15].

Il problema di determinare il numero $\theta(x)$ dei numeri primi inferiori ad x, diventato ormai celebre, come oggetto di studio dei più illustri matematici del secolo scorso, ha presentato sempre così gravi difficoltà, da far temere che i mezzi a disposizione dell'analisi, fossero insufficienti

(1) Si considerino quattro punti di una retta; il problema di trovare le proiettività che trasformano tale quaterna in sè stessa ammette *in generale* 3 soluzioni; ma ne ha 6 se i quattro punti sono armonici e 7 se sono equianarmonici. — Lo Schoute spiega il perchè della presenza delle nuove soluzioni, senza però riuscire a togliere importanza alla geniale osservazione dello Study. Si vegga a questo proposito un articolo di G. Kohn nell'*Archiv für Math. und Phys.*, 3.ª Ser., T. IV, 1903, p. 312.

Digitized by Google

per condurre ad una risposta soddisfacente. Il problema esige che la funzione $\theta(x)$ sia posta sotto una forma tale, che le sue determinazioni, per ogni valore di x, si possano calcolare esattamente, od almeno con approssimazione assegnabile: ora la funzione $\theta(x)$ presenta un numero infinito di discontinuità, la cui posizione non è *a priori* conosciuta; l'applicazione quindi, ed il maneggio delle formule riesce estremamente difficile, per quanto si faccia appello a tutte le risorse dell'analisi.

Da Euclide, che pose virtualmente il problema, a Legendre, che primo tentò di risolverlo con una formula, molti furono i matematici che lo fecero oggetto di studio; le loro ricerche però non vanno considerate come veri e propri contributi all'argomento. La formula di Legendre

$$\theta(x) = \frac{x}{\log x - 1{,}08366},$$

desunta dalla frequenza dei numeri primi noti, segna in linea storica il primo tentativo serio per rispondere alla questione. Le ricerche di Gauss, esse pure empiriche, ma degne tuttavia del grande matematico, fanno capo all'altra formula approssimata, destinata poi a diventar classica:

$$\theta(x) = \mathrm{Li}(x).$$

Il problema non fa seri passi, per quanto elaborato dalla feconda mente di Dirichlet; più tardi Tchebischef inaugura un metodo nuovo e razionale per lo studio di $\theta(x)$; e quasi subito sorge il genio di Riemann, che alle ricerche, rimaste prima quasi sempre sterili, schiude una via completamente nuova. Per una di quelle intuizioni ardite, famigliari al suo genio, Riemann applica alla funzione $\Sigma \frac{1}{n^s}$ l'idea nuovissima dell'estensione a tutto il piano di una quantità che esiste soltanto in una parte di esso; ne trae una funzione uniforme che gli permette poi di dedurre la sua celebre formula, la cui validità, dopo gravi dispute, è stata posta recentemente al sicuro da qualunque critica.

Quasi tutti i matematici, che dopo si occuparono del problema, fecero oggetto dei loro studi la funzione che Riemann ha dato all'analisi; e le ricerche di Hadamard, von Mangoldt, La Vallée-Poussin, che danno gli ultimi e più cospicui risultati sull'argomento, seguono pure l'aspra via aperta da Riemann, la quale ora si presenta come la sola, che possa condurre alla scoperta di ciò che ancora resta latente nella grave questione.

Accennato così rapidamente alla storia dell'argomento, veniamo a parlare della monografia del Torelli. In essa l'autore espone tutte le ricerche riguardanti il problema sopradetto, ne fa notare i singoli indirizzi, ne discute i risultati, rilevando opportunamente le questioni

Digitized by Google

insolute o pendenti, e coordinando il lavoro in modo che valga a dare esatta cognizione dell'argomento. Esso consta di 205 pagine di testo, cui seguono: *a*) Una tabella dei simboli adoperati con maggior frequenza e con significato costante. *b*) Un elenco dei nomi degli autori di cui sono ricordate le contribuzioni relative all'argomento del lavoro. *c*) Una tabella contenente i valori della totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato, secondo le formule di Legendre, di Tchebichef-Gauss, di Cesàro, di Riemann-Gram, di Meissel, e secondo la effettiva enumerazione di Glaisher. *d*) Un diagramma rappresentante le deviazioni relative alle varie formule assintotiche, pel calcolo della totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato.

La materia è divisa in 12 capitoli. L'autore comincia col presentare i tre indirizzi differenti, che agli studiosi si sono offerti per le ricerche:

1.° Procedere alla effettiva enumerazione, mediante la conoscenza di tutti i numeri primi fino al limite assegnato.

2.° Escogitare un metodo, che, servendosi della effettiva conoscenza di solo una parte dei numeri primi fino al limite dato, offra la totalità dei numeri primi fino a questo limite.

3.° Costruire la funzione $\theta(x)$ senza bisogno della conoscenza dei numeri primi.

Al primo indirizzo appartengono i lavori sulle tavole dei numeri primi e su quelle dei più piccoli divisori dei numeri: si notano qui i nomi di Lambert, Euler, Vega, Burckhardt, Glaisher, Dase e Davis; allo stesso indirizzo si collegano le ricerche sul riconoscimento di un numero primo, e sui posti della serie naturale, dove più rari sono i numeri primi: qui prendono posto fra le altre le brevi ricerche di Euler, Gauss, Tchebichef. Al secondo indirizzo appartiene il procedimento di Legendre inteso a determinare la totalità dei numeri primi fino ad m, quando sono noti solo i numeri primi fino a $\sqrt{m}$; a questa ricerca si riattaccano le analoghe di Meissel, Rogel, Hargreave. Questa la materia dei due primi capitoli, ciascuno dei quali si riferisce ad uno dei due primi indirizzi. Giungiamo così nel terzo capitolo alle ricerche che seguono l'ultimo: l'autore esibisce ed illustra le celebri formule di Legendre, Encke e quella più fortunata di Gauss, e viene nel quarto capitolo alle due memorie di Tchebichef, che inaugurano le ricerche seriamente razionali. Nell'esposizione della prima memoria si confrontano i risultati che essa offre colle formule di Legendre e Gauss, e vien fatto cenno della modifica che Gram ha portato ad un procedimento di Tchebichef, per giungere ad un più completo risultato, trovato poi da Riemann. Viene poi la seconda memoria di Tchebichef, che vale la dimostrazione del postulato del Bertrand, ed offre per la totalità dei numeri primi non superiori ad x, nuovi limiti utili: a questa memoria si collegano i lavori analoghi di Sylvester e di Gram.

Digitized by Google

Nel quinto capitolo sono esposte alcune ricerche del Cesàro, le quali fanno capo alla determinazione del valore assintotico, già dato da Tchebichef, per la totalità dei numeri primi non superiori ad x; poi è riferito un secondo valore assintotico dovuto al Glaisher, ed un terzo trovato pure dal Cesàro. A questo punto l'autore, seguendo il metodo del Glaisher, illustra con calcoli numerici le diverse formule di Cesàro, Riemann, Gauss e Legendre, riportando poi i risultati alla fine del libro, nella già accennata tabella, che trova la più completa illustrazione nel diagramma che la segue.

Il capitolo VI è consacrato alle ricerche intese a determinare il valore di un numero primo di determinato posto: qui vanno, per ordine logico, annoverate una recente memoria di Jsenkrahe e quindi una assai anteriore di Smith; seguono la discussione delle quattro formule di Perwouchine, ed il confronto di esse coi risultati ottenuti dal Cesàro. Il capitolo seguente tratta delle valutazioni assai dubbie ottenute da Legendre, Hargreave e Tchebichef, i quali applicarono le loro formule come uguaglianze complete: si notano poi pel confronto le stesse valutazioni fatte col metodo di Cesàro e con quello di Mertens.

I lavori fin qui incontrati giovano a comprendere la funzione $\theta(x)$ fra limiti assai opportuni; ma di essa danno solo espressioni assintotiche, le quali non si possono assumere come formule di approssimazione, per valori finiti della variabile. Ben altra importanza ha il metodo inaugurato da Riemann, come quello che ricerca un complesso di enti analitici, mediante i quali sia possibile dare una espressione esatta di $\theta(x)$. Nel capitolo VIII l'autore riferisce la memoria di Riemann: definisce la funzione $\zeta(s)$, ne dà la continuazione analitica, seguendo Riemann, Hermite, La Vallée-Poussin; accenna utilmente alla relazione funzionale Riemann-Schlömilch, e completa il carattere analitico della funzione $\zeta(s)$, producendo tutti i risultati sulla distribuzione dei suoi zeri, acquisiti alla scienza per opera di Hadamard e La Vallée-Poussin: viene quindi alla funzione $\xi(t)$; fa rilevare i notevoli risultati intuiti, non dimostrati, da Riemann, e compie l'esposizione della memoria, dando la classica formula colla rettificazione del Genocchi, colle trasformazioni di Gram e Mangoldt. E qui viene opportuna l'introduzione della funzione $\mu(n)$ di Möbius, la quale riesce di grande utilità nella valutazione della formula di Riemann. Questa si presenta come la prima che offra un'espressione completa di $\theta(x)$, fornisce un valore approssimato, la cui deviazione è minore di quella di tutte le precedenti formule, e pone in evidenza il predominio che ha in $\theta(x)$ l'espressione di Gauss, destinata a diventar poi il classico valore assintotico di $\theta(x)$. Alla formula di Riemann segue la discussione del Gram sulle radici di $\xi(t)$, una proposizione empirica di Mertens sulla funzione di Möbius, e un accenno ad altre funzioni numeriche analoghe.

Digitized by Google

Giunto così al capitolo IX, l'autore espone i lavori che sono il complemento naturale della memoria di Riemann; e prima quelli di Hadamard, von Schaper, Borel e Mangoldt, intesi a colmare le lacune lasciate nella detta memoria sulla funzione $\xi(t)$. Segue la questione capitale della realità delle radici di $\xi(t)$: Stieltjes disse di possederne la prova, che non pubblicò mai; Jensen ne promise recentemente un'altra, che non comparve. Ma intanto, stabiliti con rigore gli enunciati preliminari della memoria di Riemann, a meno del teorema ultimo, non necessario per condurre alla formula finale, von Mangoldt dimostra rigorosamente la seconda parte della memoria, e deduce in modo inattaccabile e più accessibile la formula che ne è frutto. L'autore, nel mostrare tutto questo, accenna alle ricerche anteriori allo stesso intento di Piltz, che ebbe il merito di essere per il primo entrato nel pensiero di Riemann.

Nel capitolo X vengono segnalati i lavori che sono naturale conseguenza della memoria di Riemann, la quale ha fornito i mezzi per stabilire con rigore quelle formule assintotiche, che si erano già trovate ammettendo l'esistenza del limite. Si notano la valutazione di una espressione già calcolata da Legendre, ed i metodi usati da diversi matematici, per ottenere il valore completo di una funzione trattata da Tchebichef, e quindi sono riferite le conseguenze assintotiche importanti, che sono frutto delle ricerche di Hargreave, Sylvester, Stieltjes, Halphen, Cahen, La Vallée-Poussin, Hadamard, von Mangoldt, Cesàro e Mertens. A questo punto viene posto in giusta luce il brillante teorema di La Vallée-Poussin, che supera in esattezza il presentimento di Gauss, e compie le ricerche anteriori sull'argomento: *Li* (x) *è l'espressione assintotica di* $\vartheta(x)$ *più esatta di tutte le sue espressioni possibili sotto forma finita.* Il capitolo si chiude cogli studi recenti di von Mangoldt, Landau, La Vallée-Poussin sulla funzione di Möbius.

Il capitolo XI tratta delle questioni che ha suscitato la feconda elaborazione del classico teorema di Dirichlet affermante l'esistenza di infiniti numeri primi in ogni progressione aritmetica, la cui ragione è prima col termine iniziale. Sono notati i teoremi di Tchebichef e Poincaré sulla distribuzione dei numeri primi fra due speciali forme; teoremi, che trovano poi opportuna estensione in un lavoro di La Vallée-Poussin. Poi l'autore espone un suo metodo inteso a semplificare il problema già studiato da Piltz sulla frequenza dei numeri primi in una progressione aritmetica; segue la valutazione assintotica relativa al problema detto; poi il teorema di Poincaré sulla totalità dei numeri complessi di Gauss, ed una estensione di questo ai numeri primi ideali; tali risultati vengono in appresso estesi ad altro caso, e frattanto trova posto lo studio notevole della distribuzione dei numeri primi fra le due classi dei residui e dei non residui quadratici di un

Digitized by Google

numero. In questo capitolo, che in gran parte è originale, e presenta un pregevole contributo dell'autore alla questione, abbondano i utili illustrazioni numeriche.

Siamo così giunti all'ultimo capitolo. Le complicazioni e le difficoltà, insite nella struttura della formula di Riemann, e la poca speranza che essa quindi ha sempre lasciato di adattarsi a calcoli numerici esatti, indussero parecchi studiosi a ricercare la risposta del problema, seguendo altra via. Parecchi degli studi, che seguono questo nuovo indirizzo, sono intesi alla ricerca di una equazione caratteristica dei numeri primi, e prendono specialmente le mosse dalla serie di Lambert; vanno notati al riguardo i lavori di Scherk, Schlomilch, Cesàro, Burhenne e Curtze. I due ultimi giungono ad una equazione caratteristica: il Curtze muove dal concetto di determinare la somma della serie; con metodi differenti la stessa somma è trovata da Schlomilch, La Vallée-Poussin, Hansen, Catalan e Cesàro. Le ricerche di quest'ordine si chiudono colla nota di Levi-Civita che giunge ad un'equazione caratteristica, ingegnosa sì, ma troppo complicata date le attuali risorse dell'analisi. Seguono poi le ricerche che prendono le mosse dal teorema di Wilson; prima quelle di Rogel che fanno capo ad una formula, la quale offre il valore di $\theta(x)$; poi le altre analoghe del Laurent, il quale giunge ai suoi risultati per tre vie differenti: pel teorema di Wilson, per la serie di Fourier, e pel calcolo dei residui. Colle soluzioni di von Koch, Wigert, Lorenz terminano gli studi di quest'ordine. I quali per quanto ingegnosi, non possono competere colla risposta che al problema ha dato Riemann: troppo lavoro resta a farsi per decomporre le espressioni, che da quelli risultano, in altre meno complicate; di più alcune presentano altri inconvenienti, quella di Rogel p. es. ha bisogno della effettiva conoscenza dei numeri primi. Il difetto comune a tutte le ricerche sui numeri primi, spicca in quelle che seguono quest'ultimo indirizzo, e l'autore conclude brevemente che la memoria di Riemann, e le altre che ne sono natural complemento, additano l'unica via che possa dare utili frutti.

Tale è la materia trattata nella monografia del Torelli. Fra i lavori che siamo andati enumerando trovan posto tutte, anche le più modeste ricerche sull'argomento, le quali sono coordinate in modo da seguire l'ordine storico, finchè l'esigenza del criterio logico lo permette. Per quanto sia ricca la letteratura dell'argomento, l'autore ha potuto presentarci completa una delle più laboriose ed interessanti pagine d'analisi; egli non è stato pago di esibire i risultati, e d'esporre i metodi che a quelli hanno condotto; ma quasi ad ogni lavoro ha fatto seguire una discussione esauriente.

L'opera è poi distribuita in modo che in essa il lettore può sempre e facilmente orientarsi, acquistare esatta cognizione dei singoli indirizzi

Digitized by Google

e metodi seguiti, senza ricorrere alle fonti, delle quali inoltre ha occasione di trovare un utilissimo commentario. Forse l'autore, che possiede largamente il suo soggetto, poteva dare una diversa distribuzione alla materia, in guisa da imprimere a ciascun capitolo un colore ed un carattere proprio, che emergesse da opportuna intestazione, e fosse illustrato da un breve cenno storico; e ciò anche a scapito della ben dettagliata classificazione; allora il lavoro risponderebbe anche al desiderio di chi, pur non volendo addentrarsi nell'argomento, brama acquistarne una conoscenza sommaria e superficiale. Ma i pregi dell'opera sono così cospicui, che non vengono menomati per tale mancanza, per cui, certi che anche i nuovi ed importanti risultati, cui l'autore è giunto, siano inattaccabili, invitiamo gli studiosi a rendergli plauso.

MARIO VECCHI (1).

CECILIO JIMENEZ RECEDA. *Lecciones de geometria métrica.* Madrid, Suarez, 1903; 8.° p. XVIII + 228 + 248, con un Atlante di 24 tav. lit.

Il senso delle parole con cui s'intitola questa nuova opera dell'egregio professore dell'Università di Madrid non essendo esente da ambiguità crediamo opportuno dichiarare il contenuto di essa riproducendo gli argomenti delle 33 lezioni in cui essa è divisa.

INTRODUZIONE.

PARTE PRIMA: *Nozioni fondamentali di geometria metrica.* I. Nozioni sopra le rette, i piani, le stelle e gli angoli. II. Relazioni di perpendicolarità e parallelismo. III. Angoli a lati paralleli o perpendicolari. IV. Elementi all'infinito e proiezione parallela. V. Poligoni ed angoli poliedri. VI. Angoli dei poligoni e degli angoli poliedrici. VII. Figure simmetriche. VIII. Relazioni fra segmenti di una retta o fra angoli (piani o diedri) di un fascio (di raggi o di piani). IX. Parallelogrammi ed analoghi angoli tetraedri. X. Proprietà del circolo e del cono di rivoluzione. XI. Angoli nelle circonferenze. XII. Nozioni fondamentali sopra le misure. XIII. Teoria della proporzionalità fra segmenti. XIV. Trigonometria. XV. Rettificazione di linee e determinazione di aree di superficie coniche.

(1) Ci scrive il ch.mo Prof. Torelli che attualmente egli lavora attorno a un'aggiunta alla sua monografia, in cui, oltre a render conto di alcune importanti recenti pubblicazioni sull'argomento, nonchè di qualche memoria anteriore sfuggitagli, sostituisce nuovi procedimenti a quegli esposti nei §§. 15, 102, 103 che egli ha riconosciuti non esatti [G. L.].

Digitized by Google

PARTE SECONDA. *Studio delle varie figure del piano e della stella e delle loro relazioni geometriche.* I. Segmenti ed angoli. II. Rapporti anarmonici ed armonici. III. Costruzione geometrica di formole algebriche segmentarie. IV. Triangoli e triedri. V. Proprietà metrico-projettive di triangoli e tetraedri. VI. Alcune relazioni metriche fra il triangolo ed il circolo. VII. Poli e polari rispetto ad un circolo o ad un cono. VIII. Quadrilateri in generale. IX. Poligoni ed angoli poliedrici in generale. X. Poligoni regolari. XI. Sistemi di circoli. XII. Eguaglianza e similitudine. XIII. Omotetia, omologia, affinità ed involuzione. XIV. Figure inverse. XV. Misura della circonferenza e della superficie conica di rivoluzione. XVI. Aree delle figure piane. XVII. Massimi e minimi. Calcolo per approssimazione di aree. XVIII. Nozioni sulle coniche.

Dalla semplice ispezione di codesto indice risulta che l'autore appartiene alla schiera di coloro che ritengono utile, scientificamente e didatticamente, la fusione della planimetria con la stereometria; essendo egli estremamente parco in citazioni, non ci è dato asserire se l'idea di riavvicinare le proposizioni analoghe nel piano e nello spazio sia sorta in lui spontaneamente o se gli venne ispirata da opere anteriori. Nel primo caso egli meriterebbe di essere posto nel gruppo formato da Bretschneider, Méray e De Paolis, e fornirebbe un argomento per sostenere che la fusione corrisponde ad uno stato naturale di cose; in ogni caso egli va ascritto fra coloro che attuarono felicemente l'intima miscela fra le due parti in cui Euclide divise la geometria. — Questo carattere del lavoro in discorso basterebbe a mostrarlo meritevole dell'attenzione dei nostri lettori; ma non è il solo; però su gli altri, come di minore importanza, ci sia lecito sorvolare.

G. L.

K. GEISSLER. *Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie.* Leipzig, Teubner, 1902; VIII-417 p. 8.° [Prezzo del vol. legato Mk. 14].

L'autore di questo libro viene ad accrescere la già numerosa schiera di coloro che si propongono di chiarire *il mistero dell'infinito matematico.*

Egli parte (p. 1) da questo fatto, che una retta può imaginarsi indefinitamente lunga, e quindi che essa ha dei punti a distanza infinita; e si chiede: Una retta ha all'infinito un punto solo o più punti? A questa domanda non può, a suo avviso, darsi risposta adeguata, e neppure all'altra, se due segmenti eguali contengano o no egual nu-

Digitized by Google

mero di punti. Però ogni difficoltà è tolta se, invece di dire che un segmento contiene infiniti punti, si dice che un segmento può dal nostro pensiero essere caricato *(behaftet)* di infiniti punti. In altre parole, per l'autore sulla retta non esistono punti se non in quanto il nostro pensiero ve li concepisce. È così che noi a due segmenti eguali possiamo attribuire un'infinità eguale o diseguale di punti, secondochè, p. es., proiettiamo l'uno dei segmenti sopra l'altro, oppure sopra una parte dell'altro. Questo concetto spiega anche un'altra contraddizione. Una retta ruotando intorno ad un suo punto incontra un'altra retta a distanza variabile da un determinato punto di questa; tale distanza, per quanto imaginiamo continuato il movimento, è sempre finita; come si può passare al caso d'una distanza infinita? Non con continuità, come or ora si è detto; non con un salto, perchè la retta si concepisce continua. L'antinomia cessa quando noi diciamo: La nostra mente può a suo piacere fissare l'attenzione o sui punti a distanza finita o su quelli a distanza infinita; può caricare *(behaften)* la retta dei punti al finito o di quelli all'infinito. Seguiremo l'esempio datoci più volte dall'autore, cercando di far meglio comprendere la cosa mediante un paragone, per quanto grossolano. Supponiamo di essere forniti di due paia di lenti di potenza diversa, atte le une a farci vedere i punti al finito, le altre i punti all'infinito; basterà mutare le lenti per vedere a piacer nostro gli uni o gli altri, e non si potrà dire che il passaggio avvenga nè in modo continuo nè in modo discontinuo. Ammesso questo principio, è chiaro che esso può avere una assai più larga applicazione; così si possono imaginare altre paia di lenti atte a farci discernere le distanze infinitesime di 1.°, di 2.°,... ordine. Una stessa figura geometrica ci appare differente a seconda delle diverse lenti con cui la guardiamo; così p. es. un triangolo che abbia un lato infinitesimo, visto colle lenti del finito, ci si presenta isoscele con due angoli retti; così la tangente, sotto le lenti del finito, ha comune un punto colla curva, sotto le lenti dell'infinitesimo, ha comune con essa un tratto rettilineo (infinitamente piccolo).

Ciò che abbiamo detto è sufficiente per far comprendere il concetto fondamentale adottato dall'autore; e d'altra parte sarebbe impossibile seguirlo nei lunghi sviluppi matematici e filosofici coi quali illustra le sue idee. Nè ci proponiamo di discutere la teoria dell'autore dal punto di vista filosofico; memori della massima: *Ne sutor ultra crepidam,* ci limitiamo ad esaminare quale valore essa abbia per la matematica.

Nella matematica l'idea d'infinito figura sotto varî aspetti, i quali però si possono raggruppare sotto tre principali, che per brevità diremo: *l'infinito della geometria sintetica,* quello *del calcolo infinitesimale* e quello *della teoria generale delle grandezze.*

Digitized by Google

In geometria sintetica, parlando dei punti all'infinito, non si intende menomamente di attribuire ad essi un'esistenza reale; un punto all'infinito significa, per convenzione, la *direzione* degli elementi di una stella di rette parallele; dire che l'iperbola taglia la retta all'infinito del suo piano in due punti reali è come dire che esistono due fasci di rette parallele ciascuna delle quali taglia la curva in un sol punto; e così via.

Anche nel calcolo infinitesimale, da Cauchy in poi, il concetto d'infinito figura solo in apparenza. La parola *infinitesimo*, malgrado la sua origine, significa una quantità finita, variabile, indefinitamente decrescente, e, quando si dice che una funzione è infinitesima in un punto, si vuol intendere che, presa ed arbitrio una quantità positiva σ, può assegnarsi un intorno di questo punto in tutti i punti del quale la funzione è, in valore assoluto, minore di σ.

Al contrario nella teoria generale delle grandezze si presentano enti che possono effettivamente considerarsi come infiniti od infinitesimi rispetto ad altri; esistono cioè certe classi di grandezze in cui, definiti convenientemente i concetti di eguale, maggiore e minore e di addizione, possono assegnarsi, in infiniti modi, due enti tali che l'uno di essi addizionato a sè stesso un numero qualsiasi di volte non supera mai l'altro. Tale è p. es. la classe degli ordini d'infinito delle funzioni; tale quella dei numeri trasfiniti di Cantor.

Il nostro autore non prende in considerazione alcuna quest'ultima specie d'infinito; anzi non mostra neppure di avvertire la differenza essenziale che passa fra questa e le altre. Egli dice infatti, p. es. (p. 331), che la teoria di Cantor fa vedere come i matematici non sieno punto d'accordo sull'uso dell'infinito nella loro scienza; ora le diverse specie d'infinito sono tanto nettamente distinte, che quello stesso Cantor, il quale ha arricchito la matematica d'una serie indefinita di enti infiniti, si è sforzato di dimostrare — appunto per mezzo della sua nuova teoria — che il segmento infinitesimo non esiste.

Le discussioni dell'autore nostro sono dunque limitate alle due prime specie d'infinito, che trovano il loro rappresentante rispettivamente nei punti all'infinito della retta e nei segmenti infinitesimi. Ed il suo errore fondamentale, dal punto di vista matematico, sta in ciò, che egli prende sul serio (ci sia permessa la frase) queste due specie d'infinito, senza accorgersi che esse d'infinito hanno solo il nome. Infatti sin dalla prima pagina egli parla dei punti all'infinito della retta come di punti realmente esistenti, e il cui concetto non differisca affatto da quello degli altri punti della retta; anzi egli dice (p. 4) che non v'ha distinzione tra un punto al finito ed uno all'infinito, giacchè i punti a distanza finita divengono punti a distanza infinita quando l'osservatore vada all'infinito!

Digitized by Google

Attribuendo un'esistenza effettiva al punto od ai punti all'infinito della retta, l'autore ne deduce l'esistenza di angoli, e quindi di segmenti, infinitesimi; le congiungenti di un punto qualunque coi punti all'infinito d'una retta formano angoli infinitesimi colla parallela alla retta condotta per quel punto.

Questi concetti, che ci riportano indietro di un secolo e più, all'epoca di Fontenelle e di Eulero, dànno luogo naturalmente a tutte le obiezioni, sulle quali tanto e così inutilmente si discusse nei tempi passati. E avanti tutto si presenta il famoso dilemma, posto già innanzi dagli avversarî di Leibniz: Se l'infinitesimo non è zero, come si può trascurare? E se è zero, come si può operare su delle quantità nulle? — Il nostro autore si schiera decisamente dalla parte di coloro che ritengono l'infinitesimo diverso da zero: così per lui due rette che si tagliano ad una distanza infinita di qualunque ordine non sono parallele (p. 258). Però l'infinitesimo, visto — per riprendere un paragone già usato — colle lenti del finito, è nullo, e quindi si può aggiungere ad una quantità finita senza alterarne il valore. Posto questo come principio (p. 26), si dimostra poi *a posteriori* (p. 79-81), coll'esempio della frazione decimale periodica $0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$, che trascurando un infinitesimo non si commette alcun errore. Ma, chiede un obiettante imaginario, come può avvenire che una grandezza abbia a considerarsi nulla come sommando, ma non come termine d'un rapporto? E l'autore risponde: Ci sono cose che, considerate in rapporto ad altre cose omogenee, non possono trascurarsi, mentre non hanno alcun valore considerate di fronte a cose eterogenee: così p. es. un minuto secondo, confrontato con un altro intervallo di tempo, ha con questo un rapporto determinato, mentre, unito ad un segmento, non aggiunge nulla ad esso. È facile vedere i molti punti deboli che presenta questo ragionamento. Fissata sopra una retta un'origine O e preso su di essa un altro punto F, il segmento OF rappresenta una quantità finita f; ammesso che esistano segmenti infinitesimi, e che il segmento OI rappresenti la quantità infinitesima i, aggiungere i ad f significa prendere sulla retta un segmento $FI' = OI$; la somma $f+i$ è rappresentata dal segmento OI', e si tratterebbe di vedere perchè i punti F, I' possano considerarsi come coincidenti. Ma l'aggiungere un minuto secondo ad un segmento non si può dire nè che abbia nè che non abbia effetto, se prima non si stabilisce il significato di una tale operazione; ciò che l'autore non cura punto di fare. Inoltre perchè il segmento finito e l'infinitesimo non devono considerarsi come grandezze omogenee? A questa domanda l'autore non risponde, od almeno non risponde chiaramente.

Se altre prove occorressero per mostrare che il nostro autore non

Digitized by Google

ha compreso il vero senso delle prime due specie d'infinito, basterebbe citare, per la prima, la sua asserzione già ricordata che due rette che s'incontrano all'infinito non sono parallele, per la seconda, il modo in cui considera le cosidette espressioni indeterminate. Ecco come incomincia lo studio del prodotto $0 \times \infty$ (p. 37): « La divisione « si definisce come l'inversa della moltiplicazione. Quindi $a : b$ denota « il numero che moltiplicato per b.... dà il valore a. Ne segue che « $1 : 0$ indicherebbe il numero che moltiplicato per 0 dà 1.... ».

È chiaro del resto che l'autore, pure possedendo molte cognizioni nel campo della matematica, non è penetrato nello spirito dei punti più delicati di questa scienza. Ecco p. es. che cosa egli dice incidentalmente degli imaginari (p. 39): « Introducendo l'unità imaginaria « $\sqrt{-1}$, deve dirsi che questa è quel numero il quale, moltiplicato « per sè stesso, dà -1. Ora può dirsi, che un tale numero non esiste, « aggiungendo che nessuno dei sinora chiamati numeri.... moltipli- « cato per sè stesso dà un numero negativo. Con ciò non è detto che « nel nostro pensiero non esista una tale grandezza. Anche nello spi- « rito possono farsi scoperte come nell'elettricità. Qualcosa, prima « non avvertito, può sonnecchiare nella nostra mente o risultare con « necessità dalle cose già scoperte. E la quantità -1, che si deduce « da quantità sinora non conosciute mediante un'operazione nota, è « pure conosciuta.... ». La sola parola *scoperta* basta a far vedere che l'autore nostro considera gl'imaginari, non già come enti *inventati* da noi ed ai quali estendiamo, in modo opportuno, le operazioni aritmetiche, ma come enti la cui esistenza scende necessariamente da quella dei numeri reali. Egli press'a poco ragiona così: Il numero -1 esiste, la moltiplicazione è un'operazione nota, quindi esiste — nella nostra mente — un numero che, moltiplicato per sè stesso, dà -1, e, se noi finora non l'abbiamo conosciuto, è semplicemente perchè non vi abbiamo fatto attenzione; così come esistevano i fenomeni elettrodinamici assai prima che Volta e Galvani li osservassero.

Dopo tutto questo noi crediamo poterci dispensare dall'analizzare punto per punto il libro del Geissler; tanto più che una tale analisi ci condurrebbe soltanto a ripetere più volte, sotto forme diverse, le osservazioni fondamentali già esposte.

E per concludere, diremo che questo libro ci sembra rappresentare, dal punto di vista matematico, un ritorno ad un'epoca scientifica fortunatamente da lungo tempo tramontata.

G. Vivanti.

Digitized by Google

F. S. HOLZINGER. *Aritmetica politica per le Scuole di commercio (Accademie di commercio). Prima versione italiana.* Vienna, A. Holder, 1902, 8.°, p. 4 + 118 [Prezzo Corone 1. 60].

Le matematiche applicate si sono recentemente accresciute di un nuovo importante ramo: la scienza dell' attuario. Prodotto dal meraviglioso sviluppo che ebbero nel Secolo scorso le Società d' assicurazione, nelle svariate loro forme, esso non mancò di attirare l' attenzione di matematici di grido, che lo presero per soggetto di pubblicazioni speciali e di lezioni universitarie: ci basti ricordare L. Kiepert e M. Cantor. Le Università di Vienna e di Göttinga stabilirono anzi dei corsi regolari su quella che vien colà chiamata *Versicherungsmathematik*, ed in Austria, con Decreto del 3 febbraio 1895, il Ministro dell' Interno istituì uno speciale « Diploma per l' attuario » Ora, quasi come ulteriore conferma dell' interesse che nell' Impero austro-ungarico viene tributato a quella nuova parte dello scibile matematico, ci si presenta l' opera che è soggetto del presente articolo, opera che va segnalata ai lettori italiani del *Bollettino*, non foss' altro per essere la prima del genere (se non c' inganniamo) che annoveri la nostra letteratura.

Premesse alcune nozioni sulla progressione e sul calcolo d' interessi semplici l' autore tratta successivamente le questioni seguenti:

I. *Calcolo d' interesse composto e di rendita.* II. *Corso dei prestiti e costruzioni di piani d' ammortizzazione.* III. *Piani d' ammortizzazione pei prestiti con lotteria.* IV. *Calcolo delle probabilità. Rendita vitalizia.* V. *Assicurazione di un capitale in caso di morte.* VI. *Assicurazione fra congiunti.*

Numerosi esempi illustrano i metodi esposti e tavole numeriche ben disposte agevolano il compito di coloro chiamati ad applicarli.

Paragonata quest' opera a quella congenere del Cantor (v. *Bollettino*, T. II, 1899, p. 103-164) si manifesta meno elevata e più pratica; onde sarà meno accetta da alcuni e preferita a quella da altri; il che basta a provare che da nessuno verrà giudicata come superflua e quindi inutile. G. L.

G. GALLUCCI. *Saggio di una introduzione alla filosofia delle matematiche.* Caltanisetta, 1902, 8.° p. 125.

Risposta ad alcune domande del Prof. Vailati (1).

(V. questo vol. del *Bollettino*, p. 19-21)

I.° Il Prof. Vailati afferma che io mi sono proposto di fornire una guida a quei matematici che intendessero prendere cognizione di *ciò*

(1) Nell'accordare, per dovere d'imparzialità, un posto alla seguente Replica del ch.mo Prof. Gallucci, la Direzione dichiara con ciò « l'incidente esaurito », ritenendo che il *Bollettino* per lo scopo *matematico* che si prefigge e pel modesto spazio di cui dispone non può servire a lunghe discussioni che principalmente interessano i cultori della filosofia [G. L.].

Digitized by Google

che nel campo della filosofia si è pensato o scritto sui principii e sui metodi della loro scienza. Ciò non è conforme al vero: infatti nella prefazione (pag. 3 e 4) ed a pag. 120 del mio opuscolo è espresso molto chiaramente lo scopo che mi sono proposto, quello cioè di una discussione preliminare delle teorie *moderne* della logica e della psicologia, da servire non solo per potere iniziare un'opera sistematica sulla filosofia matematica, ma anche per porre i matematici al corrente dello *stato attuale* delle teorie filosofiche. Dunque io non mi sono proposto di fare un'esposizione storico-critica della filosofia matematica, impresa della cui difficoltà mi sono reso *completamente conto*; per conseguenza non mi si deve incolpare di aver trascurato i filosofi greci, Leibniz, Cartesio, ecc.

II.° Il Prof. Vailati mi domanda con quali fatti io potrei giustificare l'asserto che la critica kantiana si connette con le ricerche sui fondamenti della matematica; eccomi a rispondergli. Prima di tutto io non ho inteso dire che Gauss, Bolzano ecc. hanno *direttamente* apprese da Kant le loro idee, ma che queste si inquadrano nel grandioso movimento del pensiero iniziato da E. Kant. Nella storia delle scienze, si è osservato che le grandi idee non scaturiscono dalla mente dei pensatori come Minerva dalla testa di Giove, ma che c'è una preparazione che porta naturalmente ad esse, tanto vero è ciò, che di sovente tali idee sorgono contemporaneamente nella mente di più genii. Premesso questo, passo a spiegare il mio concetto (per ulteriori sviluppi rimando al cap. 1.° della prima parte ed alla 2.ª parte del mio lavoro). Il fondamento della filosofia delle scienze non è il simbolismo universale, ma è la critica e la determinazione del conoscere sperimentale; la scienza deve a Kant il primo tentativo completo di *critica* in tal senso considerata, dunque Kant è il primo che abbia tentato di *sistematizzare* le conoscenze di filosofia delle scienze. Chi ha ben compreso il *criticismo* si convincerà che tutta la *critica attuale* dei fondamenti delle matematiche è implicitamente compresa nei canoni fondamentali della filosofia delle scienze, quale fu ideata da Kant. A questo proposito avrei molti fatti da citare; ma mi limiterò ad alcuni:

Le idee filosofiche di Riemann ed Helmholtz rappresentano dei *momenti* di quello sviluppo del pensiero iniziato dalla *critica* di Kant (leggere i frammenti filosofici di Riemann e le conferenze di Helmholtz).

Nella trattazione della quistione del tempo (*Estetica trascendentale*, parte seconda) trovasi questa frase: *il tempo ha una dimensione;* evidentemente qui la parola dimensione è intesa in senso matematico, come corrispondente alla variazione di un ente semplicemente infinito, cioè in modo non diverso da quello in cui la considerarono Grassmann e Riemann.

Digitized by Google

Le quistioni delle categorie, della deduzione trascendentale, dei principii *a priori*, son tutte questioni vive, che si connettono con i varii indirizzi della filosofia matematica (cfr. la seconda parte del mio opuscolo).

III.ª Il Prof. Vailati ha creduto non fare cenno di alcune parti del mio lavoro, le quali sono il frutto dello studio delle più importanti fonti della filosofia moderna e delle mie meditazioni personali. Queste parti sono: l'esposizione storico-critica delle moderne teorie della logica e della psicologia; un tentativo di una determinazione scientifica del conoscere sperimentale; la trattazione generale e sintetica dei principii della filosofia delle matematiche; l'esumazione di alcune idee di G. B. Vico e di Pasquale Galluppi, ora pochissimo note, ecc. Che in tutto ciò non vi sia proprio nulla degno di essere menzionato?

Napoli, 15 Febbraio 1903.

G. GALLUCCI.

D.r E. BARDEY's. *Aufgabensammlung, methodisch geordnet, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend über alle Teile der Elementarmathematik, vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen, sowie für Seminare und Präparanden-Anstalten. In alter und neuer Ausgabe. Neue Ausgabe nach der sechsundzwanzigsten Auflage bearbeitet von* F. PIETZKER *und* O. PRESLER. *Zweite Auflage.* Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1902; 8.° p. VIII + 395 [Prezzo del vol. legato Mk. 3.20].

L'opera di cui annunciamo la 28.ª edizione, malgrado lo straordinario e ben meritato successo che ebbe in Germania, è rimasta, come un'altra che di recente segnalammo (v. *Bollettino*, T. VI, 1902, p. 124) totalmente ignota in Italia. Eppure l'immensa raccolta di problemi scolastici interessanti che essa racchiude, il sapiente ordinamento adottato e le sobrie dilucidazioni annesse ad ogni problema dovevano pel passato e dovrebbero almeno per l'avvenire segnalarla all'attenzione dei nostri insegnanti. Siccome una raccolta di problemi mal si presta ad un'analisi particolareggiata e siccome la sua fisonomia è delineata con sufficiente chiarezza dall'elenco delle teorie che essa illustra, così siamo giustificati limitandoci a dar qui l'indice dei §§ in cui essa è divisa.

I. Preliminari. II. Introduzione al calcolo letterale. III. Addizioni e sottrazioni di monomi. IV. Addizione e sottrazione di polinomi. Parentesi. V. Grandezze relative (positive e negative). Addizione e sottrazione. VI. Moltiplicazione. VII. Divisione. Calcolo con quozienti.

Digitized by Google

VIII. Decomposizione in fattori. IX. Riduzione delle frazioni ai minimi termini. IX bis. Addizione e sottrazione delle frazioni. Quozienti di frazioni. X. Proporzioni. XI. Potenze ad esponenti interi positivi. XII. Potenze ad esponenti interi negativi. XIII. Radici e quantità irrazionali. XIV. Estrazione della radice quadrata. XV. Estrazione della radice cubica. XVI. Potenze ad esponente fratto. XVII. Quantità immaginarie. XVIII. Logaritmi. XIX. Frazioni continue. XX. Equazioni di 1.° grado ad un' incognita. XXI. Equazioni esponenziali riducibili ad equazioni lineari. XXII. Applicazioni delle equazioni di 1.° grado ad un' incognita. XXIII. Equazioni di 1.° grado a più incognite. XXIV. Applicazioni delle equazioni di 1.° grado a più incognite. XXV. Equazioni quadratiche ad un'incognita. XXVI. Applicazione delle equazioni di 2.° grado ad un' incognita. XXVII. Equazioni di 2.° grado con due incognite. XXVIII. Equazioni di 2.° grado con tre o quattro incognite. XXIX. Applicazione delle equazioni quadratiche a più incognite. XXIX bis. Massimi e minimi. XXX. Problemi inderminati. XXXI. Progressioni aritmetiche. XXXII. Progressioni geometriche. XXXIII. Interessi. XXXIII bis. Combinazione di progressioni aritmetiche e geometriche. XXXIV. Analisi combinatoria. XXXV. Probabilità. XXXVI. Il teorema binomiale. XXXVII. Equazioni di grado superiore in generale. XXXVIII. Equazioni cubiche. XXXIX. Equazioni biquadratiche. XL. Risoluzione delle equazioni per approssimazione.

G. L.

Dr. E. Bardey's *Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage von* Friedrich Pietzker. Leipzig und Berlin, Teubner 1903, 8.°, p. VIII + 160. [Prezzo del vol. legato Mk. 2, 60].

Uno dei più pericolosi scogli in cui s'imbattono coloro che cominciano lo studio dell'algebra è nel porre in equazione i problemi enunciati a parole. Onde uno dei compiti più delicati ed importanti del maestro consiste nell'insegnar loro ad evitarlo. A facilitare l'adempimento di siffatto ufficio è destinato appunto l'opuscolo che annunziamo. Il quale, benchè si presenti come una seconda edizione e come opera di due, è in realtà un'opera nuova, dovuta al Prof. Pietzker, ben noto agli insegnanti per altri preziosi lavori di indole didattica. Esso si apre con alcune osservazioni generali e contiene poi utili consigli sopra le principali catagorie di questioni che si sogliono proporre ai principianti e molteplici applicazioni. Le categorie suaccennate sono le seguenti: I. *Problemi puramente numerici.* II. *Problemi sul numero di oggetti numerabili.* III. *Problemi sopra misure di vario ge-*

Digitized by Google

nere. IV. *Calcoli di Miscele.* V. *Problemi di moto.* VI. *Applicazione di formole aritmetiche e trigonometriche.* VII. *Applicazioni di formole geometriche.* VIII. *Applicazioni di formole di meccanica.* IX. *Problemi di fisica e chimica.*

Sul valore dell' opera (come riconosce giustamente l' autore), un giudizio definitivo non potrà venire pronunciato che da chi l' avrà a lungo messa alla prova.

G. L.

E. Pascal. *Lezioni di Calcolo infinitesimale* (Parte I, Calcolo differenziale — Parte II, Calcolo integrale). Manuali Hoepli, Milano, 1903. Seconda edizione.

Nei due volumetti, che formano la seconda edizione delle sue *Lezioni di Calcolo infinitesimale*, l' A. non ha voluto — come dichiara esplicitamente nella prefazione — scostarsi che poco dalla prima. Ed infatti, la nuova non differisce dall' antica che per opportuni ritocchi, fatti in più punti del testo; i quali, senza per nulla alterare la fisonomia del medesimo, hanno spesso giovato assai alla chiarezza ed al rigore delle dimostrazioni. Tali modificazioni, pure essendo numerose, non sono dunque mai molto profonde, ma fanno sì che la presente edizione costituisca un notevole miglioramento della primitiva; ed esse renderanno quindi maggiormente bene accetto questo trattato, il quale, anche per le sue modeste dimensioni e la tenuità del prezzo, venne subito accolto con simpatia da coloro che intendono imparare una parte tanto fondamentale delle Matematiche superiori. Trattandosi di un' opera già conosciuta, non é certo ora il caso d' entrare in una disamina più o meno dettagliata della medesima; e perciò mi limiterò a far notare che le parti del volume dedicato al Calcolo differenziale, che più sensibilmente furono ritoccate, sono: La teoria delle serie di funzioni (ed in particolare, delle serie di potenze), le considerazioni sulla derivata di una funzione per valori infiniti di questa o della variabile, la teoria de' massimi e minimi delle funzioni di più variabili, e quella delle forme indeterminate. Nel volume dedicato al Calcolo integrale vennero specialmente aggiunte alcune considerazioni sulla lunghezza di un arco di linea, e la teoria dell' *integrafo*, colle svariate applicazioni di questo ingegnoso istrumento.

Prima di chiudere il presente rapido cenno, debbo far rilevare che la dimostrazione — fatta in principio del Calcolo differenziale — dell' esistenza di almeno un punto limite, per un gruppo di punti tutti compresi in un intervallo finito, appare nella nuova edizione, ancora più manifestamente che nella prima, come la dimostrazione del noto postulato di *Dedekind* sull' esistenza del numero che deve sempre

Digitized by Google

separare due classi contigue di numeri (sul quale postulato è basata la teoria più comunemente usata dei numeri irrazionali). Ciò si spiega col fatto che, al termine di detta dimostrazione (pag. 5) l'A. si riferisce al teorema (dimostrato in appresso) che dà la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del limite di una funzione; e quest'ultima dimostrazione è a sua volta appoggiata (pag. 25) ad un teorema precedente, che riguarda l'esistenza del limite d'una funzione non decrescente o non crescente; nel quale teorema si ammette esplicitamente (pag. 21) l'esistenza del limite superiore di ogni gruppo di numeri, tutti minori di un determinato numero finito, quando manchi il massimo; ed analogamente, quella del limite inferiore, quando manchi il minimo. In tal modo (come l'A. stesso ha comunicato gentilmente a chi scrive) si sostituirebbe il postulato di *Dedekind* coll'altro che afferma l'esistenza di quei limiti superiore ed inferiore; e dopo ciò l'A. verrebbe, in fondo a dimostrare quello di *Dedekind*. Ma allora non bisogna dimenticare che, nei suoi ragionamenti, l'A. ha inteso di riferirsi sempre a valori *reali;* e quindi — se si vuole evitare il circolo vizioso — conviene supporre anzitutto che la teoria dei numeri irrazionali sia stata svolta, non prendendo le mosse dal postulato di *Dedekind* (come si usa fare generalmente, con molto vantaggio), ma da quel nuovo postulato: riguardando cioè i numeri irrazionali come limiti superiori (od inferiori) di certe classi di numeri razionali; il che è poi, in ultima analisi, il concetto di WEIERSTRASS.

Pavia, 21 Novembre 1902.

M. CHINI.

O. STOLZ UND J. A. GMEINER. — *Theoretische Arithmetik.* II *Abtheilung. Die Lehre von den reellen und von den complexen Zahlen.* — Zweite umgearbeitete Auflage der Abschnitte V-VIII, X, XI des ersten, I, II, V des zweiten Theiles der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. — Leipzig, Teubner, 1902. XI-304 p., 8.°

Come per la prima parte dell'opera (V. *Boll.* 1901, p. 42), così anche per questa seconda ci limiteremo ad un raffronto colle classiche *Vorlesungen* di Stolz. Ecco dunque le principali aggiunte che troviamo nella nuova edizione.

Nel C. V (*Vorlesungen* I, C. V): La dimostrazione dell'indipendenza dei postulati fondamentali (p. 101-103), e lo studio dell'insieme dei segmenti considerato come un insieme continuo di grandezze assolute (p. 107-111).

Digitized by Google

Nel C. VI (*Vorl.* I, C. VI) solo alcune illustrazioni di poco conto.

Nel C. VII (*Vorl.* I, C. VII): Alcuni teoremi elementari sui limiti (p. 141-144, 166-167), e la definizione di limite superiore e inferiore (p. 167-170).

Nel C. VIII (*Vorl.* I, C. VIII): Il calcolo numerico della radice approssimata d'un numero decimale (p. 193-199).

Nel C. IX (*Vorl.* I, C. X, N. 1-12; C. XI, N. 1-6): La dimostrazione della continuità delle serie di potenze fatta senza l'uso esplicito del concetto di continuità — concetto che gli autori hanno ritenuto estraneo alla aritmetica propriamente detta — (p. 257-258).

Nel C. X (*Vorl.* II, C. I): La teoria dei quaternioni (p. 310-317).

Nel C. XI (*Vorl.* II, C. II, N. 1-11) alcune illustrazioni di pochissimo conto.

Nel C. XII (*Vorl.* II, C. II, N. 13, 17, 18): La teoria dell'esponenziale e del logaritmo (p. 361-377), che nella prima edizione (*Vorl.* I, C. VI, N. 1-4) era trattata in modo diverso.

Nel C. XIII (*Vorl.* II, C. V, N. 1-3): L'estensione del concetto di limite alle successioni di quantità complesse (p. 381-382), e lo sviluppo di e^x, sen x, cos x in serie di potenze per x complesso (p. 390-392) fatto con metodo diverso da quello usato nella prima edizione.

Notiamo ancora la teoria dei numeri complessi a più di due unità esposta da un punto di vista molto generale (p. 293-810), ed una ricca raccolta di esercizi e di applicazioni alla fine dei varî capitoli.

Le aggiunte al primo numero del C. IV (p. 395-396) confermano ciò che dicemmo nella recensione della 1.ª parte di quest'opera, che cioè quel capitolo, malgrado il suo titolo, contiene una teoria *formale* (o *analitica*) dei numeri razionali.

Le parti delle *Vorlesungen* di Stolz omesse in questa nuova edizione sono quelle che si riferiscono più propriamente alla teoria delle funzioni; esse, come gli autori promettono, formeranno il soggetto d'una nuova opera, che ci auguriamo veda presto la luce.

G. Vivanti.

G. Frizzo. *De numeris libri duo esposti ed illustrati. Appendice.* - Verona-Padova, Drucker, 1903, 8.° p. 25.

Quest'aggiunta ad un'opera che i nostri lettori conoscono (v. *Bollettino*, T. V, 1902, p. 49-51) contiene il testo e la traduzione della prefazione allo scritto del Noviomago, del quale il Prof. Frizzo trovò un esemplare completo nella Biblioteca comunale di Mantova.

G. L.

Digitized by Google

M. SCHUSTER. *Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie. Planimetrie, Stereometrie, ebene und sphärische Trigonometrie. Nach konstruktiv-analytischer Methode bearbeitet. Ausgabe A: für Vollanstalten. Zweiter Teil: Trigonometrie.* Mit einer lithographierten Tafel. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1903, 8.°, p. VII + 112 [Prezzo del vol. legato Mk. 1. 60].

Non è soltanto per la ricchezza e l'eleganza delle questioni ivi contenute che il presente libretto va segnalato con lode. È anche per alcune innovazioni che sono in esso attuate. Anzitutto in esso il *seno* cavallerescamente cede il posto d'onore alla *tangente*, per ragioni didattiche sul cui valore lasciamo giudici gl'insegnanti. In secondo luogo l'antica divisione sessagesimale è surrogata dalla centesimale, della cui adozione l'egregio autore da tempo si è fatto apostolo ed a cui favore coll'opera presente porge un nuovo argomento. Finalmente (come da qualche tempo si va con ragione facendo in Germania) i problemi artificiosamente congegnati vengono surrogati con altri, di maggiore interesse, suggeriti dalla geometria pratica, dalla geografia matematica, dall'astronomia elementare e dall'ottica, discipline di cui l'autore ricorda quanto è necessario per risolvere le questioni che propone. Non basta forse ciò a dimostrare che l'opera dello Schuster è ben lungi dall'essere una volgare compilazione scolastica? Eccone, finendo, l'ordinamento ed il contenuto:

I. Il triangolo rettangolo. II. Applicazioni del triangolo rettangolo. III. Il triangolo obliquangolo. IV. Applicazioni del triangolo obliquangolo. V. Geometria. VI. Applicazioni della geometria. VII. Il triedro ed il triangolo sferico. VIII. Applicazioni geografiche ed astronomiche del del triangolo sferico rettangolo. IX. Applicazioni geografiche ed astronomiche dei triangoli sferici obliquangoli. Tavole.

G. L.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgegeben von H. BURKHARDT *und* W. FRANZ MEYER. Leipzig, Teubner.
V. *Bollettino* IV, 1901, p. 88.

Band I. Heft 7 (1902. Prezzo Mk. 3,60). R. Mehmke, *Numerisches Rechnen* (cont. e fine). Ahrens, *Mathematische Spiele.* Pareto, *Anwendung der Mathematik auf Nationalökonomie.*

Band II_2. Heft 1 (1901. Prezzo Mk. 5,20). Osgood, *Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen* a) *einer und* b) *mehrerer komplexen Grössen.* Wirtinger, *Algebraische Funktionen und ihre Integrale.*

Band III_2. Heft 1 (1903. Prezzo Mk. 5). Dingeldey, *Kegelschnitte und Kegelschnittensysteme.*

Digitized by Google

Band III_3. Heft 1 (1902. Prezzo Mk. 5,10). Mangoldt, *Anwendungen der Differential-und Integralrechnung auf Kurven und Flächen.* v. Lilienthal, *Die auf einer Fläche gezogenen Kurven.*

Band IV_1. Heft 2 (1902. Prezzo Mk. 4,60). Timerding, *Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers.* Schönflies, *Kinematik.*

Band IV_2. Heft 1 (1901. Prezzo Mk. 3,80). Abraham, *Geometrische Grundbegriffe der Mechanik der deformirbaren Körper.* Love, *Hydrodynamik.*

NOTIZIE

I PREMI DELL'ISTITUTO DI FRANCIA. — Nella solenne adunanza del 22 Dicembre 1902 vennero conferiti: il Gran Premio delle Scienze matematiche a E. Vessiot ed una Menzione onorevole al Le Roux; il Premio Bordin al de Tanneberg; il Premio Francoeur ad E. Lemoine; il Premio Poncelet a M. d'Ocagne; il Premio Lalande al Trépied; il Premio Valz all'Hartwig; il Premio Damoiseau al Gaillot; il Premio Janssen a Aymar de la Baume-Pluvinel; ed il Premio Saintour venne diviso fra Riquier e Minet.

Vennero poi proposti i seguenti temi di concorso:

Gran Premio delle Scienze matematiche: Perfezionare, in qualche punto importante, lo studio della convergenza delle frazioni continue algebriche (3000 fr.)

Premio Bordin: Svolgere e perfezionare la teoria delle superficie applicabili sul paraboloide di rivoluzione (3000 fr.)

Premio Vaillant: Determinare e studiare tutti gli spostamenti di una figura invariabile i cui differenti punti descrivono delle curve sferiche (1000 fr.)

***

FERDINANDO CASPARY, nato in Unruhstadt (Posnania) il 29 Dicembre 1853 e morto a Berlino il 15 Agosto 1901, forma il soggetto di una commemorazione affettuosa e profonda che E. Jahnke presentò alla Società matematica tedesca (Jahresbericht der Deutsch. Math. Ver., XII Bd., p. 42-69) e che venne pubblicata anche a parte, accompagnata dall'elenco delle pubblicazioni dell'estinto e da una lettera di Hermite. Ivi sono accuratamente descritte le vicende dell'avventurosa vita del Caspary, delineato al vivo il suo carattere e determinati il valore ed il significato delle numerose sue pubblicazioni; le quali trattano di preferenza i metodi di Grassmann e le funzioni θ, ma anche le funzioni sferiche, la geometria del triangolo, ed altre questioni

Digitized by Google

di geometria e meccanica. Il rimpianto, espresso dal Jahnke, per l'immatura scomparsa del Caspary, sarà diviso da tutti i matematici.

***

UN RAPPORTO SUI PROGRESSI RECENTEMENTE FATTI DALL'ANALISI VETTORIALE venne redatto da A. Macfarlane, dietro invito dell'« American Association for the Advancement of Science » e pubblicato nel Vol. LI (1902) dei *Proceedings* di questo sodalizio. Lo segnaliamo ai nostri lettori perchè porge molti particolari, agli Italiani generalmente sconosciuti, sulle numerose ricerche fatte durante questi ultimi dieci anni in Inghilterra, America, Olanda e Germania, Austria e Giappone sulle teorie fondate da Hamilton e Grassmann e sulle loro applicazioni alla meccanica ed alla fisica. Si vedrà da esso non essere tali teorie dimenticate e stazionarie; e si apprenderanno, non solo i perfezionamenti e le applicazioni che esse di recente ricevettero, ma anche l'enunciato di parecchie fondamentali questioni che le concernono e che importerebbe risolvere.

***

NUOVI PREMI PERIODICI. — Per onorare nel modo migliore i due Bolyai, l'Accademia Ungherese ha fondato un premio internazionale di 10,000 corone, da conferirsi ogni cinque anni all'autore della migliore ricerca geometrica pubblicato durante tale periodo. Giudice sarà una commissione composta di due membri dell'Accademia e di due altri matematici ad essa estranei.

Con analogo intento Re Oscar II di Svezia e Norvegia conferirà, pure ogni cinque anni, in memoria di Abel, una medaglia d'oro di 1000 corone al più cospicuo lavoro di matematica pura; le relative proposte verranno formulate dall'Accademia delle Scienze di Cristiania.

***

PUBBLICAZIONI IN OCCASIONE DEL PRIMO CENTENARIO DELLA NASCITA DI G. BOLYAI (15 DICEMBRE 1902). — Sotto gli auspicii dell'Accademia Ungherese delle Scienze e per cura degli accademici Kürschàck, Réthy e Totossy venne fatta una nuova edizione di lusso della celebre *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens.* Dal canto suo l'Universita di Klausenburg pubblicò un volume in latino, non meno bello (*Libellus post saeculum quam Johannes Bolyai de Bolya anno* MDCCCII *a. d.* XVIII *Kalendas Januarias Claudiopoli natus est ad celebrandam memoriam ejus immortalem,* Claudiopoli MCMII), il quale, oltre al fac-simile di una lettera del grande innovatore, contiene una memoria di L. Schlesinger su alcune applicazioni della geometria non-euclidea alla teoria delle funzioni di variabili complesse,

Digitized by Google

una di P. Stäckel sulla meccanica degli spazii a più dimensioni e la traduzione della *Bibliografia della geometria non-euclidea* di R. Bonola, che i nostri lettori ben conoscono.

***

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE:

E. Bortolotti. *Influenza dell'opera matematica di Paolo Ruffini sullo svolgimento delle teorie algebriche. Discorso letto il 4 novembre 1902 in occasione della solenne apertura degli studi nella R. Università di Modena.* (Estratto dall'Annuario della R. Università di Modena 1902-1903).

L'A., avendo avuto a propria disposizione il carteggio e l'archivio lasciati dal Ruffini, potè fornire nuovi interessanti particolari sopra la vita e le opere di questo celebre scienziato; auguriamo che, mantenendo una promessa da lui fatta, completi questo lavoro d'occasione, facendo conoscere tutto ciò d'interessante per la storia della scienza che si trova in quella collezione di manoscritti (1).

E. Lebon. *Sur un manuscrit d'un cours de J. N. Delisle au Collège Royal* (Paris, Delain, 1902).

Si tratta degli *Elemens geometriques de la sphere celeste dictés au Collège Royal*, il cui manoscritto venne casualmente scoperto dall'autore e da lui regalato alla Biblioteca dell'Osservatorio astronomico di Parigi.

H. Bosmans. *Documents inédits sur Grégoire de Saint-Vincent* (Annales de la Soc. scientifique de Bruxelles, T. XXVII, 1902-1903).

Continuando le ricerche intraprese nella nota *Deux lettres inédites de Grégoire de Saint-Vincent*, pubblicata nel volume precedente delle *Annales*, l'A. offre nuovi ed interessanti particolari sul famoso gesuita, così vivamente ed acutamente combattuto da Huygens.

F. J. Studnička. *Brevissimum Planimetriae compendium sua manu exaravit Tycho Brahe, nunc primum edidit* (Pragae, MDCCCCIII). Riproduzione in litografia di un manoscritto del celebre astronomo, esistente nella Biblioteca Carlo Ferdinando di Praga. Con dolore avvertiamo che questa pubblicazione chiude la serie numerosissima dei lavori del Prof. Studnička, mancato ai vivi, sessantasettenne, il 21 febbraio 1903.

(1) Questo nostro voto è in pieno accordo con quello che manifestò il ch.mo Prof. E. Pascal presentando in omaggio il lavoro del Bortolotti al R. Istituto Lombardo nella seduta del 12 Febbraio u. s.

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1903.

Digitized by Google

ANNO VI. LUGLIO, AGOSTO E SETTEMBRE 1903.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

Recensioni ed annunzi: BOREL, *Leçons sur les series à termes positifs* [G. Vivanti]. — KONIGSBERGER, *H. von Helmholtz*. I. [G. L.]. — BACHMANN, *Niedere Zahlentheorie* I. [G. Vivanti]. — F. ENRIQUES e U. AMALDI, *Elementi di geometria* [F. Palatini]. — SCHÜLKE, *Aufgaben-Sammlung* [G. L.]. - G. VIVANTI, *Complementi di matematica* [M. Chini]. — C. ALASIA, *Saggio terminologico-biografico sulla recente geometria del triangolo* [G. L.]. — N. H. ABEL, *Memorial* [G. L.]. — NOTHER und WIRTINGER, *Riemann's Ges. math. Werke. Nachträge* [G. L.]. — CZUBER, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. I. [P. Pizzetti]. — H. GRASSMANN, *Ges. Werke*. II Bd., II. Th. [G. L.]. — FOUET, *Leçons sur la théorie des fonctions analytiques*. I Partie [G. Vivanti].

Notizie: Congresso internazionale di Scienze storiche. – Due temi di concorso. — Concorso al premio Tenore. – Tema di matematica proposto dalla R. Accademia di Danimarca. — Matematici napoletani. — Nicola Chuquet.

RECENSIONI ED ANNUNZI

E. BOREL. *Leçons sur les séries à termes positifs professées au College de France, recueillies et rédigées par* R. d'Adhémar. Paris, Gauthier-Villars, 1902. VII+93 p. 8°.

È il quarto dei fascicoli che il Borel dedica alla teoria delle funzioni, e non è meno interessante dei precedenti.

Esso si divide in 6 capitoli.

Il Cap. I tratta delle serie a termini costanti. Dopo aver ricordato che i criteri di convergenza e di divergenza si dicono di 1.°, di 2.°,... specie secondochè dipendono da uno, da due,... termini, l'autore deduce da un teorema di Cauchy le serie di Bertrand:

$$\sum_n \frac{1}{n \cdot \lg n \cdot \lg_2 n \ldots \lg_{\mu-1} n \left(\lg_\mu n\right)^{1+\rho}},$$

Digitized by Google

che sono convergenti per $\rho > 0$, divergenti per $\rho \leq 0$, e che danno luogo ad altrettanti criteri di 1.ª specie. Data infatti una serie $\sum_n u_n$, e posto, per un determinato valore di μ:

$$u_n = \frac{1}{n \cdot \lg n \cdot \lg_2 n \ldots \lg_{\mu-1} n \left(\lg_\mu n\right)^{1+\rho n}},$$

se il minimo e il massimo dei valori limiti dell'insieme $\rho_1, \rho_2, \ldots\ldots$ sono ambidue positivi, la serie è convergente, se sono ambidue negativi, è divergente; negli altri casi, o bisogna passare a valori più elevati di μ, o i criteri di Bertrand sono inapplicabili. Borel mostra come si possano costruire serie convergenti o divergenti per le quali questi criteri sono sempre in difetto, e stabilisce il teorema generale che, per quanto sia lenta la divergenza (o la convergenza) d'una serie, si possono sempre moltiplicare i suoi termini per quantità indefinitamente decrescenti (o crescenti) tali che la serie risultante sia ancora divergente (o convergente). Però egli osserva che le serie per cui i criteri di Bertrand sono insufficienti non si presentano mai nei casi ordinari, sicchè questi criteri possono ritenersi sufficienti per la pratica, almeno allo stato attuale della scienza. Un'altra ricerca interessante è, se esista una condizione necessaria di convergenza della forma:

$$\lim_{n=\infty} \varphi(n)\, u_n = 0,$$

$\varphi(n)$ essendo una funzione avente limite superiore infinito. Si trova che, per una serie qualunque, non esiste altra condizione necessaria che $\lim_{n=\infty} u_n = 0$.

Nel Cap. II si trovano, per gli integrali estesi ad un intervallo infinito, risultati analoghi a quelli contenuti nel Capitolo precedente.

Il Cap. III si occupa del modo di crescere delle funzioni. Constatata l'esistenza di funzioni a crescenza irregolare, cioè che per infiniti valori di x sono prossime ad una data funzione e per altri infiniti valori ad un'altra, l'autore cerca di applicare il noto concetto di ordine d'infinito alla misura della rapidità con cui una funzione aumenta al tendere di x ad ∞. Se $\lim_{x=\infty} \frac{y}{x^\mu}$ è finito e diverso da zero, si dice che y è d'ordine μ; se per qualunque valore positivo di ε si ha:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y}{x^{\mu-\varepsilon}} = \infty\ , \quad \lim_{x=\infty} \frac{y}{x^{\mu+\varepsilon}} = 0,$$

si dice che l'ordine di y è (μ). Con ω poi si denota l'ordine di e^x, con ω^2 quello di e^{e^x}, con $\frac{1}{\omega}$ quello di $\lg x$. Se n è un numero

Digitized by Google

positivo qualunque, e se α, β sono due numeri interi positivi, si ha:

$$\omega + n = n + \omega\,, \quad \omega^{\alpha}\,\omega^{\beta} = \omega^{\alpha+\beta}.$$

La moltiplicazione degli ordini non è commutativa, ma è associativa; la moltiplicazione a destra è distributiva rispetto all'addizione.

Nel Cap. IV l'autore osserva, che ad ogni criterio per le serie semplici e ad ogni modo di raggruppamento dei termini d'una serie doppia corrisponde un criterio per quest'ultima serie, e dà alcune applicazioni di questo principio. Segue lo studio di qualche integrale multiplo esteso ad un campo infinito.

Il Cap. V è dedicato alle serie di potenze d'una variabile. Dopo aver ricordato il teorema di Cauchy-Hadamard, l'autore incomincia a trattare delle funzioni intere, e si propone il problema di determinare l'ordine di grandezza d'una serie convergente per ogni valore di x dato quello dei coefficienti; egli trova che, se (p) è l'ordine di $\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$, quello di $\sum_n a_n x^n$ è $\omega\left(\frac{1}{p}\right)$. Molto più difficile è il problema inverso, il quale anzi non ammette una risoluzione generale. Ancora più incompleta è la teoria delle serie di potenze aventi raggio di convergenza finito. È notevole l'osservazione di Borel che, tanto per le serie dell'uno come per quelle dell'altro tipo, il fatto che la somma della serie cresce indefinitamente al crescere di x è dovuto alla circostanza che, per ciascun valore di x, *uno* dei termini della serie diviene grandissimo; il metodo per la ricerca di questo *termine massimo* conduce a risultati assai vicini a quelli che ottiene per altra via Le Roy. Il Capitolo si chiude con un cenno sulle ricerche di Hadamard intorno al modo di comportarsi d'una serie di potenze sulla circonferenza del suo cerchio di convergenza.

Infine il Cap. VI ed ultimo tocca alcune questioni relative alle serie di potenze di più variabili.

La natura speciale degli argomenti trattati in questo opuscolo ci ha costretti a sorvolare su molti punti di grande interesse e ad astenerci da qualunque osservazione critica o comparativa. Non possiamo però terminare senza far notare come la forma viva e *parlante* usata dal Borel in questi suoi lavori ne renda la lettura, oltre che interessante, anche piacevole, come troppo di rado avviene per le opere che trattano la severa scienza delle grandezze. Tale pregio, unito all'altro della piccola mole, contribuirà senza dubbio alla maggior diffusione di questi preziosi opuscoli, che sono destinati ad attirare l'attenzione generale su alcune delle questioni più importanti e meno note dell'analisi moderna.

G. Vivanti.

Digitized by Google

Hermann von Helmholtz von Leo Konigsberger. Erster Band. Mit drei Bildnissen. Braunschweig, Vieweg, 1902, 8.° p. XII + 375. [Prezzo del vol. in broch. Mk. 8, leg. in tela Mk. 8, leg. in mezza pelle Mk. 12].

La letteratura biografica si arricchisce di un nuovo ottimo elemento (1), coll'opera — da vario tempo annunziata ed impazientemente attesa — di cui oggi segnaliamo il I Vol. ai cortesi nostri lettori.

L'uomo che ne forma il soggetto è una personalità che campeggia gigante nella coorte di scienziati che videro la luce in Germania nel corso del secolo passato. La storia della medicina, quella della fisica e quella della matematica si disputano l'onore di narrare le gesta di colui che, dal modesto ufficio di medico militare, seppe assurgere ai più alti gradi della gerarchia sociale, di chi, per meglio comprendere l'intricato meccanismo che offre il corpo umano, divenne un fisico di primo ordine ed un matematico originale e profondo.

Nessuno era più indicato del Konigsberger a scrivere la biografia dell'Helmholtz: egli ebbe, infatti, con questo relazioni di amicizia; egli disponeva di competenza sufficiente per giudicarne l'immensa e variopinta produzione intellettuale; egli infine potè giovarsi del prezioso materiale biografico rappresentato dal carteggio famigliare e scientifico del sommo scienziato. Questo materiale gli ha permesso anzitutto di porre nella debita luce il di lui padre; uomo questi, come disse Fichte, « ricco di profonda dottrina e di doti intellettuali non inferiori a quelle del figlio, il quale, unicamente in causa delle malattie e delle assorbenti occupazioni ufficiali (2), non potè completamente riuscire nel mondo », e che mai cessò di essere, più che padre affettuoso, amico fedele e consigliere illuminato del figlio suo, i cui trionfi gli procuravano una gioia così completa e pura quasi fossero i suoi propri.

Ermanno Luigi Ferdinando Helmholtz nacque a Postdam il 31 Agosto 1821, primogenito di Augusto Ferdinando Giulio e di Carolina Penne, discendente dal cittadino americano William Penne, dal cui nome proviene quello di Pensilvania. Robusto più d'intelletto che di fisica costituzione egli cominciò a Postdam gli studi secondarî ed a Berlino li finì, ottenendo, addì 12 Settembre 1838, un ottimo certificato di licenza. Mediante il quale gli fu facile ottenere l'accesso, in qualità

(1) Quasi saggio di essa può considerarsi la lettura *H. von Helmholtz, Untersuchungen uber die Grundlagen der Mathematik und Mechanik*, pubblicata sei anni fa dal Konigsberger.

(2) Dopo aver preso parte alle guerre del 1813 e 1814, si dedicò all'insegnamento secondario e dal 1820 al 1856 fu professore di Liceo; nato il 21 Dicembre 1792, morì il 6 Giugno 1859.

Digitized by Google

di studente, nel R. Istituto medico-chirurgico Federico di Berlino, ove venivano istruiti gli aspiranti al posto di medico militare. Quivi rimase durante quattro anni, attendendo non solo agli studi regolamentari, ma anche ad altri, che apparentemente non avevano alcun legame colla carriera a cui egli si dedicava, ma che vanno notati perchè in alcuni si trova la più profonda radice di alcuni lavori di Helmholtz; tali sono i suoi studi di matematiche superiori e le sue occupazioni musicali. Il 2 Novembre 1842 gli venne conferito la laurea dottorale, dietro presentazione della Dissertazione dal titolo *De fabrica systematis nervosi evertebratorum*, contenente osservazioni nuove ed importanti; e dal 1.° Ottobre 1843 egli fu nominato chirurgo nel Reggimento degli Usseri della Guardia residente a Postdam. Tale ufficio egli tenne sino al 1848, alternando l'adempimento dei doveri professionali con ricerche di scienza pura, fra i prodotti delle quali ci basterà ricordare il celebre saggio *Ueber die Erhaltung der Kraft* che, non avendo potuto ottenere dal Poggendorff l'ingresso negli « Annalen der Physik », venne pubblicato a parte dal Reimer nel 1847. Come constatazione ufficiale della considerazione, cui l'Helmholtz seppe ben presto procacciarsi, sta il fatto che egli venne proposto, dal suo antico maestro di fisiologia Giov. Müller, per le cariche di professore d'anatomia nell'Accademia di Belle Arti di Berlino e di ajuto presso la Collezione anatomico-zootomica di quella città. Una bellissima lezione di prova tenuta il 19 Agosto 1848 (che il Königsberger ha giudiziosamente riprodotta) lo manifestò a tutti degno di quei posti, che gli vennero effettivamente conferiti per Decreto del 6 Ottobre del medesimo anno.

Egli però non doveva occuparli a lungo; chè, in seguito ad invito della Facoltà medica di Königsberger, con altro Decreto del 19 Maggio 1849, veniva nominato professore straordinario di Fisiologia. Poco dopo (26 Agosto) si univa in matrimonio con Olga von Velten, di cui da varii anni era il fidanzato. L'ordinariato gli venne conferito dopo due anni e mezzo, cioè con Decreto reale del 17 Dicembre 1851. Gli anni 1849-1855 che Helmholtz passò a Königsberger vanno annoverati fra i più fecondi e felici di tutta la sua esistenza. Se, ciò non ostante, egli, prima fece buon viso ad offerte di trasferimento che gli venivano da Bonn, e poi si adoperò a che questo avesse luogo, gli è che il clima troppo rigido di Königsberg minacciava di riuscire fatale a sua moglie. I negoziati, non privi di lunghezza e non scevri di difficoltà, ebbero finalmente buon esito, sicchè nell'autunno 1855 la famiglia Helmholtz potè piantare le sue tende sulle rive del Reno.

Ma l'obbligo che il nostro scienziato assunse di insegnare anche l'anatomia, e gli ostacoli che il governo prussiano continuamente frapponeva alla costruzione dei promessi nuovi locali, fecero sì che

Digitized by Google

egli non rimanesse sordo agli inviti lusinghieri e reiterati che il governo badese gli faceva di andare ad occupare la cattedra di fisiologia vacante nell'Università di Heidelberg. Lunghissime e piene d'accidenti furono le relative negoziazioni; alla fine, nel Settembre del 1858, Helmholtz potè stabilirsi a Heidelberg, ove Bunsen e Kirchhoff lo attendevano; con questi egli determinò per quell'Università un periodo di splendore « raro per una Università e che forse non si riprodurrà mai più ».

Durante il soggiorno a Heidelberg avvennero per Helmholtz avvenimenti di eccezionale gravità; cioè la morte del padre, e poi la lunga malattia e la morte della moglie (28 Dicembre 1859). Riavutosi dal lungo terribile abbattimento prodotto da questi fatti dolorosissimi, Helmholtz non tardò a riconoscere che il nuovo ordinamento della sua casa (ove due figliuoletti erano completamente a carico della vecchia loro nonna) era assai imperfetto: donde la spiegazione del suo fidanzamento con Anna von Mohl ed il matrimonio (16 Maggio 1861) con la donna destinata ad essergli sino alla morte compagna ammirabile.

Con questo avvenimento si chiude il I vol. dell'opera del Konigsberger.

Il desiderio di essere brevi ed il programma del *Bollettino* ci sconsigliarono di entrare, nel corso di questo riassunto, in particolari sulle ricerche molteplici che ebbero per definitivo risultato la *Physiologische Optik* e *Die Lehre von den Tonempfindungen*. Ci vietarono anche di far conoscere con precisione l'arte con cui il Konigsberger seppe sfruttare il carteggio posto a sua disposizione, facendo sì che la biografia di Helmholtz risultasse in gran parte narrata da lui stesso e dai suoi corrispondenti, ed il giudizio sopra il significato ed il valore delle sue opere fosse pronunciato più spesso da altri che dal biografo. A chi poi interessa di avere un'idea sintetica del legame esistente fra la brillante serie di opere dell'Helmholtz e le vicende della sua esistenza, riuscirà gradito l'indice biografico premesso al volume, ove si trovano intercalate le date più notevoli della sua esistenza.

Nè va taciuto che il volume va adorno di tre bellissimi ritratti; uno dei quali riproduce una *daguerrotipia* del 28 Marzo 1848, un altro è tolto da un'incisione fatta in Inghilterra nel 1867, ed il terzo è la riproduzione dello splendido ritratto ad olio fatto dal Lenbach nel 1876. G. L.

P. Bachmann. *Niedere Zahlentheorie*. Erster Teil. Leipzig, Teubner, 1902. X-402 p., 8.° (Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften X 1).

Con questo lavoro l'illustre autore ha inteso in qualche modo di completare la sua grande opera sulla teoria dei numeri, dando posto

Digitized by Google

in esso a varî argomenti che in questa, per ragioni sistematiche, furono lasciati da parte o toccati appena. La prima parte, che ci sta dinanzi, è dedicata, come dice l'autore, all'aritmetica *moltiplicativa*, cioè fondata sul concetto della divisibilità, mentre la seconda tratterà dell'aritmetica *additiva*. Questa prima parte, che si apre con un'interessante introduzione storica, si divide in 7 capitoli.

Il C. I (*Numeri interi ed operazioni elementari*) stabilisce la definizione di numero secondo il concetto di Dedekind, ed introduce le tre prime operazioni aritmetiche.

Il C. II (*Divisibilità dei numeri*) tratta dei numeri frazionarî, dei numeri primi, del massimo comun divisore e del minimo multiplo di più numeri; notiamo qui il calcolo della massima potenza d'un numero primo contenuta in un fattoriale, ed altre ricerche che si connettono collo studio della funzione $[x]$.

Il C. III (*Resti e congruenze*) contiene i teoremi fondamentali sulle congruenze e la teoria delle congruenze e dei sistemi di congruenze di 1.° grado, la scomposizione delle frazioni in somme di frazioni semplici, e lo studio della fuznione $\varphi(n)$ e delle sue varie generalizzazioni; come applicazione, la formola di Smith e Mansion.

Il C. IV (*L'algoritmo di Euclide*) tratta del metodo d'Euclide per la ricerca del massimo comun divisore; segue la teoria delle frazioni continue, quella dell'algoritmo d'Euclide generalizzato, e quello delle serie di Farey, che è svolto con particolare ampiezza.

Il C. V (*Teoremi di Fermat e Wilson*) dà la dimostrazione di questi teoremi e delle loro generalizzazioni, e studia poi la funzione $q(a)$ definita dalla congruenza:

$$a^{p+1} \equiv 1 + p \cdot q(a) \pmod{p^2}$$

Il C. VI (*Teoria dei resti quadratici*), che occupa circa un terzo dell'intero volume, è dedicato essenzialmente alla storia del teorema di reciprocità ed all'esposizione sistematica delle principali dimostrazioni di esso.

Infine il C. VII (*Congruenze d'ordine superiore*) tratta dapprima delle congruenze binomie e degli indici, poi delle congruenze di forma qualunque, e si chiude colla 7.ª dimostrazione di Gauss del teorema di reciprocità.

G. Vivanti.

Federico Enriques e Ugo Amaldi. *Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori.* Bologna, Zanichelli, 1903; 8.°, pag. XXII+655 (prezzo L. 4,50).

Quest'opera di cui voglio occuparmi è di quelle che vanno prese in serio esame per ciò che riguarda l'assetto generale delle varie

Digitized by Google

teorie in se stesse ed il coordinamento di queste le une con le altre, trattandosi del lavoro di due egregi scienziati che si sono occupati precedentemente di questioni relative agli elementi della geometria (1) ed uno dei quali si occupò anche dei principii della geometria nell'indirizzo projettivo, iniziato da Cayley e Klein e proseguito poi dal Pasch, dallo Schur, dal Peano e da tanti altri.

L'opera si divide in 17 capitoli (oltre ad una breve introduzione) quasi tutti seguiti da esercizi opportunamente scelti (in tutto circa 600). Otto capitoli sono dedicati alla planimetria ed in essi si tratta ordinatamente degli enti fondamentali; delle figure poligonali; del cerchio e delle figure a contorno curvilineo; della teoria delle parallele e delle sue applicazioni (parallelogrammi, punti notevoli di un triangolo, angoli nel cerchio, poligoni regolari); della teoria dell'equivalenza; di quella delle proporzioni e delle sue applicazioni (proporzioni di segmenti e poligoni, poligoni simili); della lunghezza della circonferenza e della superficie del cerchio; della teoria della misura. Nei rimanenti capitoli vengono svolti gli argomenti di stereometria nel seguente ordine: rette e piani nello spazio; angoli e poliedri; sfera; rette e piani paralleli, prisma; cilindro, cono e figure limitate da superficie curve; equivalenza delle figure poliedriche; proporzioni e similitudini; i solidi e le superficie del cilindro, del cono e della sfera; misura.

In gran parte il metodo seguito in questo libro apparisce come una fusione di quello comune coi metodi adottati negli *Elementi di geometria* del Veronese e con le varianti in essi introdotte dall'Ingrami (2), per cui non sarà possibile d'intraprendere un serio esame dell'opera di cui ci occupiamo senza entrare in convenienti raffronti specialmente con l'opera del Veronese, la quale contiene l'esposizione degli elementi della geometria con un indirizzo ben diverso da quello tenuto negli altri testi, compresi i più recenti, e fatta in seguito ad una profonda critica dei principii condotta dall'Autore stesso (3).

Riscontriamo il metodo comune, oltrechè in tutte quelle parti le quali nelle loro linee generali hanno ricevuto ormai un assetto che per il momento pare definitivo e che, all'infuori di particolarità non essenziali, vengono svolte in tutti i trattati con lo stesso indirizzo, là dove si trae dall'esperienza il concetto di retta, di piano, di spazio (a differenza di quanto si fa nel libro del Veronese, nel quale vi è una forma, la retta, che serve a determinare tutte le altre), e quando

(1) V. l'interessante volume: *Questioni riguardanti la geometria elementare ecc. raccolte e coordinate da F. Enriques*, Bologna 1900.

(2) *Elementi di geometria*, Bologna, 1899.

(3) Per quanto riguarda l'opera del Veronese si veda la mia recensione pubblicata nel *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*, 1902. p. 104. L'edizione a cui principalmente mi riferisco nei confronti che faccio è quella del 1901.

Digitized by Google

gli Autori non si preoccupano di dare un sistema di postulati logicamente indipendenti. A questo riguardo gli A. osservano nella prefazione che « per ridurre il numero dei postulati si andrebbe incontro ad una critica minuta, didatticamente inaccettabile..., e che a nulla varrebbe affermare l'indipendenza dei postulati senza dimostrarla, e una dimostrazione di codesto genere condurrebbe necessariamente nei campi delle matematiche superiori ». Ora a me sembra che certo non la critica ma i risultati di questa abbiano a trovar posto, per quanto le esigenze didattiche lo consentano, nei libri destinati alle scuole medie, e che quando siasi potuto stabilire un sistema di postulati di cui lo scienziato abbia la certezza che sono fra loro logicamente indipendenti, o per lo meno di uno che non molto si discosti da tale ideale, questo abbia ad aver la preferenza. Che se un sistema siffatto è tale da rendere scabrosa per le menti dei nostri giovani la deduzione di qualche proposizione, si potrà di questa tralasciare la dimostrazione, senza porla fra i veri postulati, come fa il Veronese e come consiglia (pag. VI) l'Ingrami.

Ci troviamo di fronte al metodo seguito dal Veronese anzitutto nel principio scientifico fondamentale applicato per primo da questo Autore nei suoi *Fondamenti* e negli *Elementi*, e cioè che è vano parlare di stretto rigore scientifico se dal sistema di verità geometriche, astraendo dall'intuizione (cioè dal loro significato geometrico) non rimane un sistema di verità logicamente ben determinato, come nell'aritmetica; e nel principio didattico fondamentale che i nostri A. esprimono a pag. I.ª con le frasi « Un falso concetto del rigore scientifico fa ritenere a taluni che l'ideale della scienza geometrica consista nel bandire sistematicamente l'osservazione intuitiva; onde si sarebbe condotti ad una trattazione astrusa degli elementi, inaccessibile al principiante, ed inconciliabile collo scopo educativo della geometria. La geometria è scienza d'osservazione e di ragionamento, essa deve educare nei giovani queste due qualità » e che il Veronese in più occasioni (1) esprime dicendo che: « L'insegnamento della geometria dev'essere sempre vivificato dall'intuizione, sicchè il ragionamento apparisca più come una conseguenza dell'intuizione che di una logica arida ed astratta ».

Gli A. seguono ancora il Veronese quando fanno uso del concetto di movimento soltanto nelle osservazioni empiriche che premettono all'enunciato di certi postulati o che aggiungono a giustificazione di certe definizioni, senza che esse formino parte necessaria dello svolgi-

(1) Cfr. p. e. la prefazione agli *Elementi di geometria* ed il lavoro: *Les postulats de la Géométrie dans l'enseignement*. Atti del Congresso matematico di Parigi, 1900.

Digitized by Google

mento logico della materia, metodo questo che il Veronese esprime nella prefazione dicendo « si sono premesse ai postulati e ad alcune definizioni delle osservazioni empiriche, nelle quali si fa uso di concetti acquistati già dagli alunni empiricamente, che servono a chiarirli e a giustificarli, ma senza che di quei concetti si faccia uso nel ragionamento, quando essi non siano stati logicamente stabiliti nelle proposizioni che servono di base al ragionamento stesso » e gli A. pure nella prefazione là dove dicono « cominciamo collo sviluppare una serie di osservazioni ed esprimiamo il risultato di queste con un postulato enunciato in forma precisa. Dal postulato facciamo discendere col ragionamento logico i varî teoremi che ne dipendono, e ritorniamo di continuo a spiegazioni ed osservazioni di carattere intuitivo ».

Ci troviamo ancora di fronte al metodo tenuto dal Veronese quando gli A. assumono come eguali anche le figure simmetriche nello spazio, le quali nei comuni trattati non si considerano come tali; quando definiscono l'angolo ed il diedro rispettivamente come parti di un fascio di raggi e di semipiani distinguendoli dalla regione angolare e dalla regione diedrica che hanno per elemento il punto (1); quando trovano opportuno di fermarsi con maggiori particolari che non si faccia nei libri comuni, sulla divisione in parti del piano, dello spazio, dei triangoli, dei poligoni, dei poliedri, e di dar forma logica a concetti intuitivi, come p. e. al concetto dei versi nel piano e nello spazio.

L'affinità del metodo seguito dagli A. con le varianti introdotte dall'Ingrami in quello del Veronese apparisce nel modo di trattare dell'uguaglianza, dando la definizione di figure eguali caso per caso. Anzi i nostri A. si spingono in questo metodo più in là dell'Ingrami, giacchè nel mentre questi, dopo aver posti separatamente i concetti di eguaglianza tra gli angoli, i poligoni, i diedri, gli angoloidi, i poliedri, le striscie e gli strati, ne deduce (nell'Appendice al cap. XII) una definizione generale di eguaglianza, di cui si serve nel seguito (salvo a far osservare in nota come potrebbesi anche procedere senza fondarsi sull'Appendice anzidetta), essi non vengono mai a ricavare dalle varie definizioni una che valga sempre. Come ebbi già ad esprimermi quando riferii sull'opera dell'Ingrami (2), non trovo questo metodo didatticamente buono. È troppo vivo nell'intuizione dei giovani il concetto generale di eguaglianza per poterlo sottoporre con profitto delle loro facoltà mentali ad una scomposizione in particelle, e per poter esigere che p. e. la proposizione « due archi di una stessa circonferenza o di circonferenze eguali si dicono eguali se sono compresi

(1) Non capisco come in conformità a questo gli A. non abbiano definito p. e. la *striscia* (pg. 173) come parte di un fascio di rette parallele.

(2) *Periodico di matematica*, Fascicolo di Sett.-Ott. 1899.

Digitized by Google

da angoli al centro eguali » non entri nella loro mente con la credenza loro che si tratti di un teorema che si enunci senza darne la dimostrazione, anzichè col vero spirito di una definizione, e ciò torna evidentemente anche a scapito della distinzione da parte degli scolari dell'ufficio delle varie specie di proposizioni. A me pare adunque che una volta convenuto, come fanno gli A., di accettare l'idea dell'esclusione del movimento dalle basi della geometria, idea della quale è doveroso riconoscere la priorità al prof. Veronese, convenga pure accettare la definizione generale di eguaglianza data da quest'Autore, la quale, com'ebbi ad esprimermi in un altro scritto (1), segna uno dei più rilevanti progressi fatti ai nostri giorni dalla geometria elementare. Essa presenta una grande generalità disgiunta da qualsiasi artificiosità, il che è dovuto al fatto ch'è stata dedotta dal concetto logico e primitivo dell'eguaglianza che è quello che noi adoperiamo comunemente nel discorso (2). Ed è per questo che la definizione del Veronese, quando venga convenientemente spiegata con esempi intuitivi, riesce bene accetta ai giovani, i quali tanto più l'apprezzano quando vedono nel seguito che le dimostrazioni di parecchi teoremi si riducono in fondo alle poche parole « le figure F, F′ sono eguali perchè sono figure corrispondenti in figure eguali ». Temono alcuni che torni difficile agli alunni delle nostre scuole il concetto di corrispondenza sul quale la definizione del Veronese è fondata, ma io credo che nessuno di essi abbia provato a far uso di tale concetto nella scuola, altrimenti si sarebbe accorto che i giovani con esso abbastanza facilmente si famigliarizzano, e non può essere diversamente quando si pensi che ne fanno uso spesso nella vita pratica. Del resto è così importante il concetto di corrispondenza e così utile anche in altre questioni, da valer bene la pena di affrontarlo ed insistervi fin da principio, chè il tempo in ciò impiegato si tradurrà in un notevole risparmio nel seguito.

Nel caso del testo attuale poi, in cui non si viene mai a porre una definizione veramente generale di figure eguali (diversamente da quanto fa, come dissi, l'Ingrami), si va incontro ad un altro inconveniente, che cioè se mai l'allievo si troverà di fronte a figure di quelle non considerate nel libro (p. e. a delle ellissi), non potrà decidere se siano eguali o no, non sapendo quando dovrà chiamarle eguali, almeno stando alle nozioni da lui acquistate nella scuola.

La parte più originale dell'opera è quella che si riferisce alla teoria dell'equivalenza. Gli A. dopo aver rilevato nella prefazione il

(1) V. *Osservazioni sulla Nota « Pro fastone » del prof. De Amicis* - Bollettino di Mathesis, 1898.

(2) Cfr. Veronese, *Fondamenti di geometria* ecc., Padova 1891.

Digitized by Google

ben noto inconveniente che si ha in questa teoria per il fatto che la definizione, cui ordinariamente si ricorre, fondata sulla decomponibilità in parti rispettivamente eguali, non è più sufficiente quando si passa p. e. al cerchio ed al tetraedro, per cui se ne estende allora il concetto in base alla teoria dei limiti, scindono codesta teoria in due parti: quella delle figure *equivalenti* (decomponibili in parti rispettivamente eguali), e quella delle *superficie e solidi eguali* chiamando *uguali* due superficie (o due solidi) quando l'una non sia *maggiore* dell'altra (o *prevalente* sull'altra), dopo aver posta (pg. 261) la definizione: « se due figure (piane) a contorno curvilineo sono divise in parti, per mezzo di segmenti e di archi di circonferenza, sicchè esse risultino somme di poligoni curvilinei, e se fra le parti dell'una si trovano tanti poligoni eguali a quelli in cui l'altra è divisa, e qualche parte residua, la prima figura si dice *prevalente* sull'altra, e la seconda *suvvalente* alla prima », definizione che vien poi estesa (pg. 583) alle figure solide limitate da superficie piane o curve.

Stando adunque a queste definizioni una superficie piana F si dirà uguale ad una F′ quando non è possibile eseguire nelle due figure una scomposizione in parti, mediante segmenti ed archi di cerchio, in modo che ciascuna parte dell'una, p. e. della F′, ne abbia una di corrispondente eguale nell'altra, la quale contenga inoltre qualche parte ancora. Ora dopo questo non rimane affatto giustificata l'asserzione (pg. 264) « confrontando due superficie si ha dunque che l'una di esse è maggiore, uguale o minore dell'altra », perchè nulla ci impedisce di credere (stando a quanto è esposto nel testo) che possano esser date due superficie F, F′ di cui la prima sia maggiore (nel senso intuitivo di questa parola, e si badi bene che la definizione formale di una parola in geometria elementare deve comprendere tutti i casi che quella parola comprende nel suo senso intuitivo) della seconda, e che non esista una scomposizione loro in parti tali che ognuna di quelle di F′ abbia la corrispondente eguale in F, la quale contenga qualche parte ancora; allo stesso modo che possono esser date due superficie G, G′ eguali (nel senso intuitivo della parola) senza che sia possibile una loro scomposizione in parti rispettivamente eguali: in tal caso dunque, stando alle definizioni adottate dagli A. dovrebbesi concludere che F, F′ sono due superficie eguali. Per spiegarmi ancora di più, nulla di quanto è contenuto nel libro mi vieta di estendere le anzidette definizioni a due superficie di cui una o entrambe non siano contenute in un piano, chiamando sempre una maggiore dell'altra (e questa minore di quella) quando avviene quel tal fatto che abbiamo più volte detto, e dicendole in caso contrario eguali. Allora prendo una calotta sferica e la sua base, e dico: siccome non è possibile

Digitized by Google

scomporre le due superficie in modo che ecc., così una di esse non è maggiore dell'altra, cioè sono eguali.

Dopo queste osservazioni risulta dunque che, acciocchè le definizioni date dagli A. si trovino in armonia con l'intuizione, devesi ammettere che il maggiore e minore non costituiscono necessariamente l'intera negazione dell'eguale (ritenendo il maggiore, minore, eguale come son definiti nel testo), e questo fatto infirma tutte le dimostrazioni che nel libro si fanno seguendo la via tenuta per il cerchio a pg. 368-70 e per i tetraedri a pg. 585-88. Infatti nella dimostrazione p. e. della pg. 368 si dice: « Indichiamo con (C) la superficie del cerchio dato e con (T) quella del triangolo che ha per base la lunghezza della circonferenza data e per altezza il raggio di questa. Per dimostrare che (C) è uguale a (T) basta far vedere che (C) non può esser nè maggiore, nè minore di (T) ». Ora ciò non va bene; bisognerebbe dire: « basta far vedere che non è (C) non eguale a (T) »; e siccome, per quanto abbiamo osservato, non possiamo affermare che le relazioni $(C) > (T)$, $(C) < (T)$ formino l'intera negazione dell'uguale, così non basta dimostrare che non possono aver luogo queste due relazioni per poter affermare che (C), (T) non sono disuguali, e che perciò sono eguali.

I teoremi astratti della teoria delle proporzioni, svolta col metodo degli equimultipli, sono, dal punto di vista didattico, opportunamente divisi in gruppi, ognuno dei quali è seguito da tutte quelle applicazioni che ne derivano, cosicchè rimane diminuito lo sforzo che deve subire la mente dei giovani per impadronirsi di quella teoria certo scabrosa. Tuttavia si potrebbe osservare che gli A. si giovano dell'equivalenza per la dimostrazione di alcune proposizioni della teoria delle proporzioni, il che non è da approvare dal punto di vista della uniformità del metodo, essendo le due teorie affatto indipendenti, e tanto più che si può raggiungere lo stesso scopo senza ricorrere a tale intromissione e senza nulla perdere in facilità (1). Gli A. stessi mostransi contrari a fondere fra loro argomenti di natura diversa là dove (pg. VI) dichiarano che hanno introdotto il postulato delle parallele assai tardi nell'organamento della loro Geometria, « giacchè le proprietà dell'eguaglianza dei poligoni, e le prime relazioni relative al cerchio non ne dipendono affatto, e non vengono per nulla rese più facili dall'uso di quella estranea considerazione ». In questo il libro attuale discorda dagli *Elementi* del Veronese nei quali si parla di rette parallele molto per tempo, il che permette all'Autore di raggiungere il notevole vantaggio di dimostrare la proposizione fon-

(1) Cfr. la mia Nota: *La teoria detta dei segmenti proporzionali* ecc., Pitagora, anno V, n.° 4.

Digitized by Google

damentale del piano evitando il difetto rilevato da Gauss in quell'assioma. Però veramente non si può dire che gli A. si attengano scrupolosamente al criterio espresso dalle frasi poco sopra citate, il che avverrebbe se premettessero tutte le proposizioni comuni alle tre geometrie di Euclide, di Lobatschewsky e di Riemann; anzi, senza enunciarlo con un postulato, ammettono fin da principio (pg. 6, n.° 15) che la retta è divisa da un suo punto in due parti, cioè che essa è una linea aperta, escludendo così subito la geometria Riemanniana, e mentre a quest'ultima appartengono pur certi teoremi relativi ai triangoli (p. e. quelli delle pg. 62, 64, 65), essi ne vengono esclusi giacchè le loro dimostrazioni, fatte come sono secondo il metodo di Euclide, si fondano sul teorema dell'angolo esterno di un triangolo il quale a sua volta (pg. 61) è fondato sull'ipotesi della retta aperta. E siccome con ciò parrebbe che si volesse sottilizzare nella critica, così dirò che queste osservazioni feci ripensando alle notevoli modificazioni al metodo Euclideo introdotte dal Veronese nelle dimostrazioni dei teoremi sopra accennati e di alcuni altri, dimostrazioni che essendo indipendenti dall'ipotesi della retta aperta, gli permisero di offrirci quel bellissimo raffronto della geometria della stella con quella del piano di cui ho più a lungo parlato nella mia citata recensione, mentre l'avere i nostri A. seguito in quei teoremi il metodo Euclideo non permette loro di avvicinare con altrettanta intimità la geometria piana alla solida « modellando lo svolgimento di questa sopra lo svolgimento di quella », il che a pg. XI dimostrano di ritener opportuno che si faccia.

Noto ancora che, a differenza della maggior parte dei libri congeneri, trovansi in questo che esaminiamo alcuni cenni sulle figure a contorno curvilineo e su quelle limitate da superficie curve.

Quanto alla questione della fusione gli A. tengono completamente divise in tutte le loro parti la planimetria dalla stereometria, pur lasciando la possibilità di effettuare l'avvicinamento delle varie parti, a differenza del Veronese il quale tratta separatamente la geometria della retta, del piano, dello spazio per quanto riguarda le proprietà generali, trattando invece simultaneamente le teorie speciali quali quella dell'equivalenza, della similitudine, ecc. (1).

Concluderò col notare che il tentativo di dare un buon assetto alla geometria elementare da insegnarsi nelle nostre scuole secondarie

(1) A questo proposito dobbiamo rettificare l'asserzione degli A. (pg. X) che il prof. Veronese abbia accolto nei suoi *Elementi* il concetto, applicato per primo dal De Paolis e accettato poi dal Lazzeri e dal Bassani, della fusione della planimetria con la stereometria, giacchè anzi il Veronese si è dichiarato più volte contrario a tale concetto non solo per ragioni didattiche ma anche per ragioni scientifiche.

Digitized by Google

superiori, fatto con questo libro da persone così autorevoli come sono gli egregi A. di esso, e i cui risultati pur lasciano a desiderare, dimostra quante difficoltà presenti il conseguimento di siffatto assetto, e deve servir di monito a taluni che con straordinaria leggerezza e senza possedere una solida preparazione si permettono di compilare libri di geometria che non fanno onore nè a chi li ha composti, nè alla produzione scientifico-didattica del nostro paese, e ad altri che con altrettanta leggerezza giudicano sfavorevolmente e mettono quasi in ridicolo i risultati degli sforzi di tanti profondi pensatori unicamente perchè non ne comprendono la portata. Un tentativo può essere più o meno riuscito, ma ad ogni modo i lavori che siano frutto di faticose e sapienti indagini e di sincerità scientifica, vanno accolti sempre con plauso e con gratitudine verso gli autori.

Torino, aprile 1903.

FRANCESCO PALATINI.

A. SCHÜLKE. *Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie nebst Anwendung auf Astronomie, Feldmessung, Nautik, Physik, Technik, Volkswirthschaftslehre für die oberen Klassen höherer Schulen.* Mit 45 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, 1902, 8.° p. X + 193 [Prezzo del Vol. leg. Mk. 2,20].

Una raccolta ben ordinata comprendente non meno di 6000 esercizî su tutti i rami della matematica elementare, la geometria analitica del piano inclusa, è degna certamente di attrarre l'attenzione di quei lettori del *Bollettino* che occupano una cattedra nell' insegnamento secondario: ad essi sia quindi per primi diretto l' annunzio della nuova pubblicazione del Prof. Schülke. Ma non ad essi soltanto; perchè la densa prefazione, in cui l' autore, per giustificare i criterî secondo cui venne fatta la scelta degli esercizî proposti, porge notizie sopra innovazioni didattiche proposte da lui e da' suoi colleghi d'oltre Alpi, desterà l' interesse di coloro che si dilettano di seguire le nuove correnti del pensiero, che di quando in quando modificano nelle sue fondamenta il piano dell' insegnamento matematico. Lo spazio di cui disponiamo non concedendo analisi particolareggiate e discussioni approfondite, basti citare fra le novità segnalate dal nostro autore gli sforzi che in Germania si vanno facendo per escludere dalle scuole i calcoli aritmetici *con più di 4 decimali* e il costume che si va diffondendo di cercare la materia per gli esercizî nelle scienze applicate — quali la geometria pratica, la navigazione, la scienza forestale, la statistica e simili —; è evidente che tale sistema merita approvazione incondizionata, come

Digitized by Google

quello che è capace di destare l'amore per le matematiche pure anche in quegli scolari che rifuggono per indole dalle considerazioni esclusivamente astratte.

G. L.

G. Vivanti. — *Complementi di Matematica ad uso dei chimici e dei naturalisti* — Manuali Hoepli, Milano, 1903.

Le applicazioni, sempre più numerose, che vanno facendosi dei metodi e dei risultati propri delle Matematiche superiori, in questioni di Chimica, Cristallografia, Economia politica, Statistica, Biologia, ecc. indussero già alcuni autori stranieri a pubblicare dei trattati, che servissero di guida a tutti coloro che desiderano acquistare, con relativa facilità, la conoscenza di quei metodi, e dei principali resultati a cui essi conducono.

In Italia non esisteva ancora una pubblicazione di tal genere; e quindi fu ottima l'idea del prof. Vivanti (della R. Università di Messina) di dare alla luce un testo che servisse appunto allo scopo suddetto.

Come l'A. dichiara nella prefazione, il presente trattato riproduce, con notevoli aggiunte, la materia di un Corso libero, che egli tenne nell'Università messinese nel 1900-901, per gli studenti di Chimica e Scienze naturali; a somiglianza di quanto già si faceva in qualche altro Ateneo. E poichè il nuovo Regolamento della Facoltà di Scienze ha introdotto, molto opportunamente, come materia obbligatoria per gli studenti di Chimica pura, un *Corso speciale di Matematiche*, e ne consiglia l'inscrizione a quelli di Scienze naturali, così il testo del prof. Vivanti potrà essere utile, in particolare modo, a coloro che fin da ora seguono il detto Corso.

La compilazione di un trattato, come quello di cui discorriamo, presenta senza dubbio non poche difficoltà. Giacchè esso risponderà veramente al suo scopo quando, fatta dapprima una opportuna scelta delle teorie matematiche di maggiore interesse, e di più frequente applicazione, si riesca a svolgerle in modo semplice e chiaro, senza mancare alle giuste esigenze del rigore scientifico; e ad illustrarle, volta per volta, con esempi tratti dall'una o l'altra delle varie scienze interessate (al fine di rendere più attraente lo studio di quelle teorie, e di dar subito un'idea — sia pure embrionale — del come si possano utilizzare, fuori del campo della Matematica, i concetti ed i resultati esposti). Ognuno comprende quindi, a prima vista, come tutto ciò si possa conseguire soltanto da chi accoppia una non comune abilità didattica ad una larga cultura scientifica.

Il libro del Vivanti venne compilato appunto in base ai criteri sud-

Digitized by Google

detti; e l'A. è riuscito, in molte parti, a renderne agevole ed interessante la lettura. Ma nello svolgimento di talune altre, mi sembra che non abbia sempre fatto uso di quella semplicità o di quegli artifizi didattici, necessari al conseguimento del fine speciale che qui si ha di mira. Come pure, mentre alcune teorie hanno avuto, a parer mio, il loro giusto sviluppo, altre invece vennero esposte o troppo largamente, o troppo in succinto. Per esempio, quella dei determinanti parmi abbia avuto un'estensione piuttosto eccessiva (ed era forse opportuno semplificarne anche la maniera solita di trattazione); mentre si omise quasi la teoria dei limiti. La Geometria analitica dello spazio credo sia pure sovrabbondante, ed il Calcolo integrale è invece un po' troppo ristretto. La Meccanica razionale si poteva alleggerirla maggiormente; mentre hanno avuto un ben proporzionato sviluppo — oltre il Calcolo differenziale — il Calcolo delle probabilità e la Termodinamica. La prima di queste ultime due parti essendo utile specialmente a chi voglia applicarsi poi agli studi di Statistica; e la seconda, a chi intenda seguire le ricerche proprie della Chimica fisica

I molteplici argomenti del testo furono esposti quasi sempre con forma chiara e precisa; rimanendo osservato, in generale, il rigore delle dimostrazioni. Però, nei programmi di Algebra e Geometria analitica, che vengono per primi, è da lamentarsi la mancanza di opportuni esempi illustrativi, o di un cenno immediato delle applicazioni che possono farsi dei resultati ottenuti. Credo quindi che la lettura di queste due parti non riuscirà molto attraente per coloro a cui il libro è destinato. Invece tutte le parti successive, cioè: il Calcolo infinitesimale, il Calcolo delle probabilità (colla teoria degli errori), la Meccanica razionale e la Termodinamica (seguita da alcune semplici questioni di Meccanica chimica) contengono frequenti applicazioni dei principî svolti, nel campo delle Scienze d'osservazione. Con ciò è reso interessante, anche pei non matematici, lo studio di quelle teorie; essendo indicato assai efficacemente come si possano impiegare, fuori del campo astratto, i numerosi concetti che vengono mano mano sviluppati.

In conclusione, il libro del prof. Vivanti costituisce un testo pregevole, per l'uso a cui è destinato; ed essendo in Italia la prima pubblicazione del genere, dobbiamo compiacerci della sua comparsa. È poi da augurarsi che esso giovi alla diffusione, e quindi alla applicazione, di quei potenti mezzi di Calcolo, che hanno ormai larga parte nel progresso di molte Scienze.

Genova, 29 Aprile 1903

MINEO CHINI.

Digitized by Google

C. ALASIA. *Saggio terminologico-bibliografico sulla recente geometria del triangolo.* Bergamo, F. e P. Bolis, 1902, 8.° gr. p. IV+43.

La geometria del triangolo rappresenta il più considerevole ampliamento che i moderni seppero arrecare alla *parte dottrinale* (1) della geometria di Euclide. Coltivata con zelo e perseveranza da molti geometri, essa raggiunse ben presto uno sviluppo insperato; vantata forse eccessivamente da alcuni suoi cultori, essa trovò, in conseguenza gagliardi detrattori, i quali, spaventati dalla selva di figure che veniva ad addensarsi attorno al triangolo rettilineo, proclamarono la necessità di abbatterla, di sfrondarla od almeno di interromperne la coltivazione. E tale consiglio sembra sia stato ben accolto, giacchè in questi ultimi tempi apparvero più spesso scritti dedicati a riordinare il materiale già adunato che memorie contenenti risultati veramente originali. A siffatta categoria appartiene l'opuscolo che annunciamo. Nel quale sono raccolti in ordine alfabetico i nomi delle singole figure che vennero sino ad ora aggregate ad ogni triangolo, accompagnati dalle loro definizioni ed equazioni e da compendiose notizie bibliografiche (2). Chiunque conosca quanto estesa e complicata sia la nomenclatura della geometria del triangolo riconoscerà l'utilità dell'ingrato lavoro compiuto dal Prof. Alasia e tributerà gratitudine a chi se lo è addossato e lo ha lodevolmente recato a compimento.

G. L.

Niels Henrik Abel. Memorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. Kristiania, J. Dybwad, 1902.

Questo splendido volume, di circa 400 pagine in 4.°, ornato delle riproduzioni in litografia dei due quadri ove sono nell'uno eternate le fattezze del celebre matematico e nell'altro l'aspetto del luogo ove egli nacque, nonchè di sei *fac-similes* di sue scritture, venne pubblicato per ordine del Consiglio accademico dell'Università di Cristiania, in occasione del primo centenario della nascita di Abel (cfr. questo *Bollettino*, T. V, 1902, p. 96). Il nocciolo di questa pubblicazione è formato da quanto si potè ancora trovare del carteggio di Abel (le lettere scritte in norvegese vennero pubblicate nell'originale ed in traduzione francese); molto ne era noto, ma il resto non è privo di interesse; vennero aggiunte alcune lettere, più recenti, relative ad

(1) Ci esprimiamo così perchè per quanto concerne le costruzioni va ricordata la *geometrografia* del Lemoine (cfr. *Bollettino*, T. V, 1901, p. 85-86).

(2) Riguardo a queste ci sia permesso sollevare qualche dubbio intorno alla esattezza dei richiami ad Archimede e Pappo fatti a pag. 5.

Digitized by Google

Abel, fra cui il lettore noterà quelle recanti la firma del Weierstrass (1). Tali lettere sono precedute da una lunga *Introduzione* scritta da E. Holst e costituente un prezioso complemento alla biografia del Bjerkness; poichè ivi è fatto cenno dell'essere stato Abel, durante il suo soggiorno a Parigi, collaboratore del *Bulletin* del Ferrussac, ci sia lecito esprimere il desiderio che degli articoli da lui scritti venga, se è possibile, redatto un elenco completo, chè è del massimo interesse che nulla passi inosservato di ciò che ha scritto un uomo qual è Abel. Le lettere stesse sono seguite da una collezione di documenti concernenti il grande scienziato, i quali, nella loro durezza e freddezza producono impressione immensa su chi rifletta come essi abbiano determinato od almeno corrispondano a momenti decisivi nella sua esistenza. Chiude il volume uno studio particolareggiato e profondo compiuto da L. Sylow sopra il genio e le scoperte di Abel; il dotto editore delle *Oeuvres complètes* sfruttando tutto il materiale, edito ed inedito, concernente quel genio, compulsando persino i registri dei prestiti della pubblica biblioteca di Cristiania, per sorprendere Abel mentre dissetavasi alle fonti scientifiche che la patria sua gli offriva, potè chiarire molti punti interessanti nello svolgimento delle sue idee e additarne altri che esigono nuovi studi e nuovi documenti.

Emerge da ciò che il volume discorso dovrà essere consultato da chiunque in avvenire vorrà occuparsi del brillante periodo di storia scientifica caratterizzata dalla fondazione della teoria delle funzioni ellittiche. G. L.

BERNHARD RIEMANN *'s Gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausgegeben von* M. NOTHER *und* W. WIRTINGER. Mit 9 Figuren im Text. 8.° gr. p. VIII+116. Leipzig, Teubner, 1902 [Prezzo Mk. 6].

« Nei dieci anni ormai trascorsi dalla pubblicazione della II ed. delle Opere di Riemann, è stato scoperto nuovo materiale concernente il

(1) Ci sia lecito riprodurre qui un brano di una lettera scritta al Lie dal Weierstrass addì 10 Aprile 1882 e contenente un particolare interessante su questo. È ivi parola di una lettera di Abel a Legendre: « Questa lettera è indubbiamente di Abel, fu scritta pochi mesi prima della sua morte, e possiede un interesse particolare in quantochè contiene, in forma estremamente concisa, un riassunto di una gran parte dei suoi più importanti lavori. Per me poi questa lettera, che la conobbi da studente nel Giornale di Crelle, ebbe conseguenze della massima importanza. Dedurre la rappresentazione analitica data da Abel per la funzione, da lui chiamata $\lambda(x)$ dalla equazione differenziale che definisce tale funzione, fu il primo importante problema matematico che io mi sono proposto, e la cui soluzione decise me, che da principio coltivavo le scienze sociali, nel settimo semestre di studio universitario, a dedicarmi totalmente alla matematica. Inoltre, del problema di integrare una data equazione differenziale mediante trascendenti ellittici, in tutti i casi ove ciò è possibile io mi sono occupato eccitatovi da Abel ed ho stabiliti almeno i principi su cui riposa tale integrazione e spero di aggiungervi ancora qualcosa in seguito ».

Digitized by Google

campo più importante in cui si svolse la sua attività, cioè la teoria delle funzioni abeliane e quella delle equazioni differenziali del secondo ordine, materiale consegnato principalmente in trascrizioni di sue *Lezioni* e che fa vedere o prova come Riemann nelle sue lezioni sia giunto assai più in là che nelle sue pubblicazioni. Portare nel dominio del pubblico siffatto materiale, ecco lo scopo dei *Nachträge zu Riemann's Ges. Math. Werke* ».

Dimostrare l'opportunità e l'importanza di tale appendice è completamente inutile; essa è un prodotto naturale della tendenza moderna di ricercare con scrupolosa cura tutte le estrinsecazioni del pensiero dei geni creatori, per determinare, senza lacune e senza esuberanza, tutto ciò che ad essi è debitrice l'umanità. « È chiaro che stabilendo una serie di idee che Riemann svolse o per conto proprio o dinnanzi una piccola cerchia di ascoltatori, non risultano in alcun modo menomate le benemerenze, anzi vengono poste in più chiara luce, di coloro che più tardi indipendentemente da lui concepirono i medesimi problemi e, risolvendoli in modo originale, assicurarono loro il posto che meritano nella matematica moderna. Ma il fatto che tali questioni e tali metodi appartengono al ciclo d'idee riemanniano offre un interesse storico non dissimile da quello che possiede l'altra che Gauss era in possesso della teoria delle funzioni ellittiche assai prima di Abel e Jacobi ».

Il volumetto che annunciamo si divide in cinque parti. La I contiene sunti delle lezioni di Riemann sulla teoria degli integrali di differenziali algebrici, la II si riferisce al contegno in un punto di diramazione degli integrali di un'equazione differenziale del second'ordine, la III tratta delle serie ipergeometriche, la IV è formata da note sopra soggetti sparsi e la V di notizie sopra manoscritti di Riemann. Numerose note fanno conoscere la provenienza degli scritti pubblicati e le relazioni fra essi e lavori già noti di lui o di altri.

G. L.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung von EMANUEL CZUBER. 1 Hälfte. — Leipzig, Teubner, 1902, pag. 304. [Prezzo Mk. 12].

In Italia gli studî sulla teoria delle probabilità e sulle sue applicazioni non hanno generalmente avuto fortuna; e a noi è occorso di sentire qualche persona di merito parlare di queste dottrine come di cose che *hanno fatto il loro tempo.* Ciò è da attribuirsi, in parte forse, a quella giusta diffidenza che l'ingegno italiano, di natura sua equilibrato, ha verso talune applicazioni arbitrarie delle teorie in discorso; ma, in maggior parte, a una non giusta indifferenza che molti dei

Digitized by Google

nostri cultori di scienze positive provano verso quegli studi che hanno indole filosofica e che imprendono, per dir così, a scrutare il ragionamento scientifico nelle sue basi fondamentali. Ma non avviene lo stesso fuori d'Italia, dove molte e non poco apprezzate furono le pubblicazioni che videro la luce negli ultimi decenni sia sulle *probabilità* in generale, sia su talune applicazioni di esse e principalmente sui metodi di *combinazione delle osservazioni.*

Le idee fondamentali che servono di base alla teoria delle probabilità e che trovano in essa il loro sviluppo e una limpida illustrazione, sono troppo connesse coi problemi della ricerca sperimentale; d'altra parte talune applicazioni, quale è quella or ora accennata, sono troppo necessarie, perchè non si debba considerare come opportuno un seguito di trattazioni matematiche colle quali quegli sviluppi e quelle applicazioni siano logicamente ottenuti; non foss'altro, per mettere in guardia gli studi, e gli osservatori specialmente, contro l'erronea applicazione di formole divenute di uso comune. E d'altra parte, se giova una prudente limitazione nell'ammettere principî e metodi che hanno una base in parte convenzionale, non è men vero che molti dei risultati della teoria delle probabilità hanno nei fatti sperimentali molte luminose conferme, che gli scettici assolutamente trascurano. Pertanto con vero piacere abbiamo letto attentamente il libro del quale qui riferiamo. L'Autore, ben noto per molti importanti lavori (1), ha qui esposto la teoria delle probabilità e delle sue applicazioni in quel modo che allo spirito critico dei nostri tempi deve apparire come il più ragionevole, vogliamo dire preoccupandosi, da principio non solo, ma in tutto il seguito dell'opera, di ben chiarire e discutere i principî sui quali i calcoli son basati. In pari tempo Egli non trascura quella parte che sta all'estremità opposta del procedimento didattico, vogliamo dire la opportuna esemplificazione numerica, con problemi tratti da cose di diversissima indole.

La definizione della *probabilità* nel senso puramente logico, quale essa nasce dal *giudizio ipotetico disgiuntivo,* la definizione del *fatto accidentale,* della probabilità *matematica,* la discussione intorno alla questione, tanto vitale, della *uguale possibilità* dei casi elementari, occupano parecchie pagine, gradite a leggersi a chi è versato nella materia, utilissime ai principianti. Non mancano le citazioni e i riferimenti a recenti lavori sulle basi logiche del concetto di probabilità.

Il richiamo delle formole di Analisi combinatoria e della formola di Stirling pel calcolo approssimato di $n!$ dànno occasione a trattare molti esempi importanti, i quali si risolvono in base alla sola defini-

(1) Citeremo in particolare la bella opera: « Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Anwendungen » Leipzig, 1899.

Digitized by Google

zione della probabilità matematica. Alcuni di questi presentano già a priori una discreta difficoltà. Molti altri notevoli esempì seguono alla dimostrazione dei teoremi sulla *probabilità composta* e sulla *probabilità totale*. Non mancano il classico problema *des partis*, e quello di Moivre (probabilità che la somma di r numeri, eguali o diversi, scelti a caso fra i primi n interi, assuma un dato valore). Nè mancano qui, e prima, le notizie storiche intorno alla origine dei problemi trattati. Un capitolo è di poi dedicato alla *probabilita geometrica* e al *valor medio*, argomento al quale l'A. dedicò già un suo libro ben conosciuto. A questo ente, il *valor medio*, si attaccano più innanzi i teoremi di Cebyscef, in seguito ai quali il concetto stesso del valor medio, dapprima puramente analitico, vien ad avere un significato, diremo così *di fatto*, in quanto appare come risultato limite in un numero illimitato di esperimenti.

Segue lo studio della probabilità dei risultati di un gran numero di *prove ripetute*, nel caso, dapprima, che l'avvenimento atteso, in ogni prova, abbia probabilità *costante* (teorema di G. Bernoulli), e della deviazione media del risultato effettivo di tali prove dal risultato a priori più probabili. Le osservazioni fatte sovra un gran numero di estrazioni del lotto servono come esempì e come prove sperimentali. Il caso della *probabilità variabile* si scinde in due: quello in cui dell'avvenimento atteso si conosca la probabilità p in ogni prova (teorema di Poisson, e di Bernoulli generalizzato), e quello in cui della p non si conoscano i singoli valori, ma soltanto il valor medio μ fra quelli che la p può assumere nelle varie prove (*legge dei grandi numeri*). Con acuto esame l'A. stabilisce il raffronto fra questi due casi e mostra come la legge dei grandi numeri non dica in realtà nulla di più che il teorema di Bernoulli, dove alla probabilità data e costante si sostituisce un ente ipotetico, ma pur costante: il valor medio μ sopra definito.

Un altro Capitolo è dedicato allo studio della probabilità relativa delle varie ipotesi che si possono pensare a spiegazione di un fatto già avvenuto (teorema di Bayes, inversione del teorema di Bernoulli, ecc.). Un tal genere di ricerca è reso, in pratica, difficile, spesso illusorio, dal fatto che, per trar partito delle formole, occorre, o conoscere la probabilità a *priori* delle varie cause, ovvero, per difetto di ragione sufficiente, assumere le cause come a priori egualmente probabili. Tale è il caso dell'*urna* che contenga palle bianche e nere senza che si sappia alcunchè intorno al modo tenuto nel riempire l'urna. Si estraggono s palle, delle quali m riescono bianche: la ipotesi più probabile, dopo ciò, è che il rapporto r del numero delle bianche al numero totale delle palle nell'urna sia $m : s$. Per giungere a questo risultato bisogna ammettere che, a *priori*, ogni ipotesi sulla composizione del-

Digitized by Google

l'urna sia ugualmente giustificata. In migliori condizioni si trova la ricerca in quest'altro caso. La composizione dell'urna è stata regolata nel seguente modo: si è lanciata c volta una moneta; ogni volta che si è avuto *testa* si è posta una palla bianca nell'urna; per ogni *croce* una nera, sicchè per ogni palla contenuta nell'urna la probabilità di esser bianca è $\frac{1}{2}$. Dopo ciò si son fatte s estrazioni ottenendo m bianche; si domanda anche qui il valor più probabile del rapporto r. Qui la prob.ª a priori dei varii possibili valori di r è nota; ha quindi luogo una esatta applicazione del teorema di Bayes, in base al quale si dimostra che l'ipotesi più probabile, a posteriori, sul valore di r è, non più $\frac{m}{s}$, ma $\frac{c+2m}{2(c+s)}$, il che può esprimersi così: il modo tenuto nel riempire l'urna e il risultato dell'estrazione ci danno due diverse informazioni sul valore di r $\left(\frac{1}{2}\text{ e }\frac{m}{s}\right)$; il valor più probabile è una *media* fra questi due, ai quali si attribuiscano i *pesi* rispettivi c ed s. Risultato interessante e che corrisponde ad una logica aspettazione.

Interessa pure la discussione che l'A. fa (seguendo in ciò Poisson e Bertrand) intorno al risultato della nota esperienza di Buffon, vogliamo dire dell'essersi ottenuto 2048 volte *croce* col gettare 4040 volte una moneta. Qual è la probabilità che vi sia nella moneta un grado di eterogeneità il quale tenda a dare sistematicamente piuttosto *croce* che *testa?* Il risultato della discussione analitica è che l'eccesso osservato (28) non ha nulla di così impossibile a priori, da render necessario l'attribuirlo ad una intima proprietà della moneta, la quale dia a priori una probabilità superiore a $\frac{1}{2}$ al presentarsi della *croce*. Questo problema dà un'idea del modo da tenersi nel cercare, in base all'esperienza, la probabilità che esistano *cause sistematiche di deviazione* da una *legge* ammessa a priori; ricerche da eseguirsi, naturalmente, con somma cautela, e i cui risultati debbono accettarsi con molta riserva.

Dopo aver trattato, come seguito alla teoria precedente, della probabilità degli avvenimenti futuri in base all'esperienza, l'A. passa ad occuparsi dei vantaggi e degli svantaggi che son allegati ad avvenimenti fortuiti, e così della *speranza matematica* e del *rischio*, delle *assicurazioni* di vario grado contro i rischi, del rapporto fra le poste nei giuochi d'azzardo. In questa sezione cade in acconcio la dimostrazione dei bei teoremi di Cebysceff sulla probabilità che la somma dei valori accidentali di n quantità variabili, presenti deviazioni, entro dati limiti, rispetto alla somma dei singoli valori medii di quelle quantità. Da questi teoremi segue una nuova semplice dimostrazione del teorema di Bernoulli intorno al risultato limite di un numero grandissimo di prove ripetute.

Digitized by Google

Segue un capitolo sull' argomento della *aspettazione* o della *speranza morale* (secondo Daniele Bernoulli). La definizione di questa riposa sul postulato che il vantaggio (positivo o negativo) che un individuo ha da un aumento infinitesimo dR della propria ricchezza R, sia proporzionale al rapporto $dR : R$. Questo principio, molto arbitrario e soggetto a non piccole obbiezioni, fu proposto dal Bernoulli per dar ragione di un risultato che a lui pareva assurdo, e che in realtà non è; vogliamo dire della soluzione del *problema di Pietroburgo*, problema e risultato troppo noti perchè se n' abbia qui a discorrere. Non è senza interesse, in ogni modo, la giustificazione matematica, che, in base al principio della speranza morale, può darsi di talune massime che il buon senso e la pratica hanno consacrato, e così: il danno del giuoco d'azzardo, il vantaggio delle assicurazioni contro i rischi, il vantaggio del dividere i guadagni aleatorî sopra più imprese indipendenti (1). L'A. osserva come il principio di Bernoulli abbia avuto influenza sul moderno indirizzo matematico della scienza delle finanze, e delle ricerche fisio-psicologiche di Fechner (e Weber). Ma quanto al valore di queste applicazioni, crediamo sia per ora immaturo il pronunciarsi.

La seconda parte, che occupa circa un terzo del volume che ci sta innanzi, è dedicata alla teoria della compensazione degli errori: e così: nozioni fondamentali sulla legge di frequenza degli errori accidentali, combinazione di osservazioni dirette o indirette, compensazione di osservazioni condizionate, calcolo, a posteriori, del grado di precisione; tutto ciò è esposto in modo logico, limpido e sobrio. Vedendo con piacere citato e seguito da vicino un nostro modesto lavoro (2), nelle questioni fondamentali intorno al *vero valore* di una quantità fisica, al *rischio matematico d' errore*, alla combinazione delle osservazioni in base al principio del *minimo rischio d' errore*, ci rallegriamo che quello che a noi parve il modo più semplice e logico d' esporre la non facile teoria, appaia tale anche a persona di noi più competente. La dimostrazione che l'A. dà della *legge di frequenza* della forma $y = Ce^{-h^2(x-a)^2}$ è quella di Crofton (Philos. Trans. Vol. 159) modificata e migliorata. Per quanto, a nostro avviso, sia sempre preferibile la dimostrazione di Bessel (3), generalizzata opportunamente, tuttavia, per la sua maggiore semplicità, anche questa è assai pregevole. Solo ci permettiamo osservare una cosa: la equazione stabilita in fondo alla pag. 213 è una semplice conseguenza del fatto che il prodotto $f(x)\,dx$, il quale esprime il numero degli errori attuali

(1) Osserveremo che in entrambe le formole nelle linee 5 e 11 della pag. 201 va aggiunto il termine — *toga;* il che non altera del resto il ragionamento successivo, nè il risultato.

(2) Atti della R. Università di Genova, 1892.

(3) Untersuch. über die Warsch. der Beobachtungsfehler (Astr. Nachr. 1838).

Digitized by Google

compresi nell' intervallo $(x + dx)$, deve essere *indipendente dall'unità* di misura addottata; e, così espressa, la cosa non dà luogo ad alcuna obbiezione; mentre il postulato dell'A., che, quando gli errori *elementari* (della cui somma si compone l' errore attuale) mutino nel rapporto $1 : r$, il numero degli errori nell' intervallo $(rx, rx + rdx)$ sia uguale a quello che era prima nell' intervallo $(x, x + dx)$, non ci sembra egualmente evidente a priori. Ma si tratta piuttosto di modo d' espressione che di sostanza.

Sarebbero state desiderabili le formole che dànno l' errore medio di una funzione di quantità dedotte da un sistema di equazioni normali, ovvero di quantità compensate. E avremmo pur visto con piacere qualche cenno intorno alla questione, così importante, degli errori sistematici, la quale ha stretto legame colle questioni trattate dall'A. nella 3.ª sezione della parte prima.

Nella 3.ª parte (della quale solo le prime tre pagine figurano nel volume pubblicato) e nella quarta, l'A. tratterà delle applicazioni alla *statistica* e alle *assicurazioni sulla vita*, e noi attendiamo con desiderio questo importante complemento di un libro, la cui lettura raccomandiamo vivamente agli studiosi di filosofia naturale.

Pisa, 24 dicembre 1902.

P. PIZZETTI.

HERMANN GRASSMANN *'s Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der math.-phys. Klasse der kgl. Sächs. Gesell. der Wiss., und unter Mitwirkung der Herren:* J. LÜROTH, E. STUDY, J. GRASSMANN, H. GRASSMANN DER JÜNGERE, G. SCHEFFERS *herausgegeben von* F. ENGEL. II Bd., II Th. *Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik.* Mit 51 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1902, 8.° gr. p. VIII + 266 [Prezzo Mk. 14].

Per cagioni indipendenti dalla volontà del Prof. Engel il II vol. delle *Opere complete* del Grassmann segue il primo ad un lungo intervallo di tempo e la seconda parte di esso (la quale contiene gli scritti di meccanica o di fisica matematica) vien fuori avanti la prima (destinata ad accogliere le memorie di geometria ed analisi).

La pubblicazione dei lavori di Meccanica analitica inseriti nella prima sezione del volume in discorso venne curata dal Prof. Lüroth. Due fra essi erano usciti per le stampe durante la vita dell' autore; sono i *Grundriss der Mechanik* (1867) e la nota memoria *Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre* (1877). Una seconda parte di questa, finora inedita, appare ora per la prima volta, assieme ad altri undici brevi lavori, trovati fra le carte dell' estinto

Digitized by Google

o composti con materiali sparsi da lui lasciati; essi porgono nuove applicazioni dei metodi del Grassmann, ma non sembrano capaci di accrescerne la rinomanza.

Alla fisica matematica appartengono i sette lavori pubblicati dall'Engel nella seconda sezione dello stesso volume; alcuni, essendo stati inseriti in diffuse raccolte, raggiunsero già considerevole notorietà, mentre altri riusciranno nuovi alla maggioranza degli studiosi; eccone i titoli: *Ableitung der Krystallgestalten aus den allgemeinen Gesetzen der Kristallbildung* (1839); *Neue Theorie der Elektrodynamik* (1845); *Zur Theorie der Farbenmischung* (1853); *Uebersicht der Akustik und der niederen Optik* (1854); *Zur Elektrodynamik* (1877); *Bemerkung zur Theorie der Farbenempfindungen* (1877); *Ueber die physikalische Natur der Sprachlaute.* Aggiunte, dilucidazioni e commenti a questi scritti si trovano nelle accuratissime note, redatte dall'Engel colla scorta di manoscritti del Gussmann, le quali servono sia a determinare le date di nascita delle idee di questo, sia a stabilirne le relazioni con lavori di altri. Esse poi fanno fare la conoscenza con Justus Günther Grassmann, padre di Hermann, ed autore di un importante scritto di cristalligrafia ove è per la prima volta (1829) insegnato quel metodo per designare con simboli le facce dei cristalli, che il Miller ha fatto poi generalmente adottare. Il padre dell'autore dell'*Ausdehnungslehre* appare quindi come il capostipite di una dinastia di pensatori, che comprende oggi tre generazioni e auguriamo possa, per benemerenze scientifiche, gareggiare con quelle dei Cassini, dei Bernoulli e degli Struve.

G. L.

E. A. Fouët. *Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.* Première Partie (Chapitres I à V). Paris, Gauthier-Villars, 1902, 330 p. 8.°.

Se è sempre difficile dare un giudizio sopra un'opera di cui è pubblicata solo una parte, lo è assai più nel caso attuale, in cui ci troviamo dinanzi un primo volume dove manca qualunque schiarimento sul piano generale dell'opera e perfino sulla estensione materiale che essa dovrà avere. L'unica parola che potrebbe darci una vaga idea delle intenzioni dell'autore è l'aggettivo: *elementari* che figura nel titolo; senonchè a smentire tale epiteto troviamo esposte in questo volume ricerche di ordine abbastanza elevato, come quelle di Painlevé, Borel, Fabry, ecc. Di più l'abitudine, poco lodevole a nostro avviso, di distribuire la materia in modo arbitrario fra il testo e le note a pie' di pagina, alternando continuamente l'uno alle altre, concorre ad accrescere la confusione nella mente di chi legge; non sappiamo quali

Digitized by Google

cognizioni esiga l'autore nei suoi lettori, quali cose intenda semplicemente richiamare, quali invece insegnare *ex novo*. In questa completa ignoranza di *ciò che debba essere* il libro nel pensiero dell'autore, non ci resta che a considerarlo in *ciò che è*, indicandone brevemente il contenuto.

Il volume si apre con una lunga *Introduzione* divisa in 2 sezioni.

La Sez. I — *Le funzioni in generale* — espone il concetto generale di funzione, dà un rapido riassunto della teoria degli aggregati, ed accenna ai diversi tipi di funzioni.

La Sez. II — *Le funzioni analitiche* — studia la continuità delle funzioni di una e di più variabili reali e delle funzioni d'una variabile complessa, poi le funzioni monogene, e infine le funzioni uniformi e le loro singolarità.

Alla Introduzione segue, non sappiamo se completo o no, il *Libro Primo;* esso s'intitola: *Metodi generali di definizione e di rappresentazione delle funzioni,* e contiene 5 Capitoli.

Nel Cap. I — *Funzioni algebriche* — dopo alcuni esempi di rappresentazioni conformi generate da funzioni algebriche, razionali o no, si stabiliscono i principali teoremi della teoria delle funzioni algebriche, e si espongono alcune nozioni sulle superficie di Riemann.

Il Cap. II — *Funzioni definite da serie* — comprende la teoria delle serie a termini costanti o variabili e in particolare delle serie di potenze, quella dei prodotti infiniti, quella delle serie trigonometriche, le ricerche moderne sulle serie divergenti, e lo studio delle funzioni trascendenti elementari, compreso l'integrale euleriano di 2.ª specie e la serie ipergeometrica.

Il Cap. III tratta delle *Funzioni definite da serie multiple*, con applicazione alle funzioni ellittiche di Jacobi e di Weierstrass.

Il Cap. IV — *Funzioni definite da integrali* — parte dalla nozione di integrale ordinario, per passare agli integrali multipli e curvilinei, ed ai teoremi di Cauchy relativi a questi ultimi.

Infine il Cap. V espone la teoria della *Continuazione analitica secondo Weierstrass,* accenna alle funzioni lacunari, alle ricerche di Painlevé e d'altri sulla continuazione d'una funzione al di là d'una linea singolare, allo sviluppo delle funzioni in serie di polinomi, ed alla estensione del concetto di continuazione analitica tentata da Fabry.

Quale sia il principio informatore di questo volume, non ci riesce di ben comprenderlo; nè ci sforziamo a questo lavoro di divinazione, lasciando all'autore la cura di illuminarci come e quando lo crederà opportuno. Non possiamo pertanto apprezzare i motivi che hanno consigliato a trattare alcune parti (come la rappresentazione conforme) con grande larghezza ed altre (come la teoria degli aggregati) con estrema concisione, ad esporre alcune teorie per esteso e a dare di

Digitized by Google

altre i soli risultati. Ci limitiamo dunque a registrare alcune inesattezze incontrate nella lettura del presente volume.

Nella Nota 1.ª a pag. 14 sembra – benchè non sia chiaro — che l'autore voglia attribuire alle potenze carattere di grandezza, ciò che sinora non è provato. — Nella Nota 2.ª a pag. 16 si legge che può esistere una corrispondenza (biunivoca) continua fra due spazi di un numero diverso di dimensioni, mentre fu dimostrato che ciò è impossibile. Così pure non è giusto il dire (Nota 2.ª a pag. 18) che i simboli composti con ω e con numeri finiti rappresentano i numeri trasfiniti di Cantor; essi non costituiscono che una classe particolare di numeri trasfiniti. — L'enunciato della Nota 2.ª a pag. 38 è inesatto; basta confrontarlo col teorema a pag. 260.

Dovremmo ancora osservare qualche difetto d'ordine (p. es. a pagina 165 si parla della continuazione analitica senza aver detto prima in che cosa consiste); ma ciò rientrerebbe in una critica generale dell'opera, dalla quale, per i motivi già esposti, crediamo dovere per ora astenerci.

G. Vivanti.

NOTIZIE

Congresso internazionale di scienze storiche. — Nel Congresso internazionale di Scienze storiche tenutosi a Roma nei giorni 2-9 del decorso Aprile una sezione speciale fu consacrata alla *Storia delle scienze matematiche, fisiche, naturali e mediche.* Era la seconda volta che un congresso internazionale storico contenesse un siffatto riparto; il numero considerevole d'intervenuti (italiani e stranieri), le importanti comunicazioni fatte, le serene discussioni che vi ebbero luogo ed i ponderati voti emessi danno sicuro affidamento che tale sistema verrà conservato nei congressi futuri.

Limitandoci a quanto si riferisce alle matematiche rileveremo che M. Cantor, A. von Braunmühl e G. Enestrom, impossibilitati di assistere personalmente al Congresso, inviarono loro scritti destinati a venire inseriti negli *Atti.* Presentarono invece lavori originali il Darvai (sopra Giovanni Bolyai), il Vacca (sulla storia della numerazione binaria), il Tonni-Bazza (sopra N. Tartaglia e B. Castelli), F. Müller, E. Lampe, A. Mori (sul carteggio inedito dello Ximenes), il Lebon, (sul piano di una bibliografia analitica dei lavori contemporanei sulla storia dell'astronomia) (1), il Günther (sul *Jakobstab*), il Pittarelli

(1) Cfr. *Bulletin de la Societé astronomique de France*, Mai 1903, p. 235-238.

Digitized by Google

(sopra un trattato di prospettiva di Pier della Francesca), P. Tannery (sopra la storia dei termini analisi e sintesi), il Vailati sopra una dimostrazione di Archimede), ecc.

Oltre ad un voto emesso, dietro proposta del Prof. Somigliana, per la pubblicazione delle opere di A. Volta, in seguito ad una particolareggiata relazione del Prof. Loria, venne deliberato ad unanimità quanto segue:

La Sezione VIII del Congresso internazionale di Scienze storiche radunato in Roma nell' Aprile 1903 fa voti che il Governo di S. M. il Re d' Italia affidi alla R. Accademia dei Lincei il compito; 1.° di esaminare le opere manoscritte di Evangelista Torricelli nell' intento di determinare quali fra esse siano meritevoli di stampa; 2.° di presiedere alla pubblicazione completa di tutte le di lui opere già edite e di quelle inedite giudicatene degne, senza escludere il suo carteggio scientifico, completando così il suo lavoro iniziato con l' edizione nazionale delle opere di Galileo.

Nè venne trascurato il lato didattico che offrono le questioni relative alla storia delle scienze. Lo provano i seguenti ordini del giorno, che pure raccolsero l' unanimità dei suffragi.

La Sezione VIII del Congresso di scienze storiche considerando essere di eccezionale importanza che alla storia delle scienze venga accordato nell' insegnamento il posto che le spetta di diritto e tenendo conto della deliberazione presa dalla V Sezione del « Congrès d'histoire comparée » tenutosi a Parigi nel Giugno 1900, emette il voto che tale insegnamento venga istituito con la creazione di corsi universitari divisi in quattro serie: 1.ª Scienze matematiche ed astronomiche; 2.ª Scienze fisiche e chimiche; 3.ª Scienze naturali; 4.ª Medicina. La Sezione stessa fa inoltre voti che dei rudimenti di storia delle scienze vengano introdotti nei programmi dei singoli insegnamenti delle Scuole medie.

In particolare riguardo all' Italia venne formulato il voto che *1.° gli insegnamenti della storia delle scienze vengano annoverati fra i corsi complementari; 2.° che l' abilitazione alla libera docenza possa essere concessa anche per la storia delle scienze* (1).

Inoltre la Sezione VIII del Congresso, per assicurare la continuazione in avvenire della propria opera, nominò un Comitato internazionale avente un nucleo costituito dai signori Benedikt (Vienna), Blanchard (Parigi), Giacosa (Torino), Günther (Monaco), Loria (Genova), Sudhoff (Berlino) e Tannery (Parigi). Compito precipuo di tale Comitato è di proporre, raccogliere e coordinare le questioni concernenti

(1) Questi voti furono conseguenza di una Relazione che scrissero i Prof.ri Barduzzi, Giacosa e Loria, e che venne integralmente pubblicata nel fascicolo di Maggio 1903 della Rivista *L' università italiana*.

Digitized by Google

la storia delle scienze da trattarsi nel venturo Congresso internazionale di scienze storiche, che sarà tenuto a Berlino alla fine di Settembre del 1906; venne così almeno in parte soddisfatto il desiderio di coloro che ritengono opportuna un'associazione mondiale di tutti i cultori della storia delle scienze.

Finalmente dietro proposta del Prof. Giacosa venne votato il seguente ordine del giorno:

La Sezione VIII del Congresso internazionale di scienze storiche fa voti, che si inizii al più presto il lavoro per la pubblicazione di un Catalogo completo per materie dei manoscritti scientifici conservati nelle Biblioteche e negli Archivi, catalogo che è desiderabile sia seguito dalla pubblicazione di quei testi che saranno riconosciuti di maggiore importanza.

Gli *Atti* del Congresso sono attualmente in corso di stampa.

***

Due temi di concorso. — L'Accademia ungherese delle scienze ha proposti due premi di 2000 corone ciascuno, il primo per un trattato di geometria assoluta di circa 25 fogli (scadenza 31 Dicembre 1904), il secondo per un lavoro sopra qualche classe d'invarianti differenziali (scadenza 31 Dicembre 1903).

***

Concorso al Premio Tenore. — L'Accademia Ponteniana propone al concorso pel premio di L. 510 il tema seguente: *Importante contributo alla teoria intrinseca generale delle curve piane.* Il concorso è aperto a tutti gl'italiani, esclusi i soci residenti dell'Accademia Ponteniana; i lavori dei concorrenti dovranno essere inviati anonimi, con le norme consuete, al Prof. L. Pinto, Segretario generale dell'Accademia, non più tardi del 31 Marzo 1904.

***

Tema di matematica proposto dalla R. Accademia di Scienze e lettere della Danimarca. — La determinazione del volume di un poliedro (e specialmente di una piramide) senza far uso del principio di esaustione, è un problema già antico sul quale l'Hilbert attirò nuovamente l'attenzione dei matematici in una ben nota lettura fatta al Congresso dei Matematici (Parigi 1900). Rispondendo a tale appello il Dehn ed il Vahlen trovarono (*Math. Annalen* T. LV, p. 465, e T. LVI, p. 507) una condizione per tale determinazione dalla quale risulta essere in generale impossibile decomporre due poliedri equivalenti in uno stesso numero finito di parti a due a due congruenti. Però, nelle indagini testè citate non si è giunti che a determinare

Digitized by Google

una condizione per siffatta decomposizione, e, mediante esempi, è facile dimostrare che essa non è sufficiente.

Per conseguenza l'Accademia propone la seguente questione:

Indicare le condizioni necessarie e sufficienti per la decomposizione di due poliedri in un numero finito di parti a due a due congruenti, ovvero recare un contributo alla soluzione di tale problema generale assegnando almeno quelle condizioni pel caso in cui uno dei due solidi è un poliedro convesso e l'altro è un cubo. Si dovranno anche indicare espressamente quali siano le piramidi soddisfacenti alle condizioni trovate.

Premio: medaglia d'oro (320 corone); scadenza: 31 Ottobre 1904. Le memorie dei concorrenti devono venire inviate anonime al Prof. H. P. Zeuthen ed essere scritte in una delle lingue: danese, svedese, inglese, tedesco, francese, latino.

***

MATEMATICI NAPOLETANI. — Sotto il titolo *Dai fratelli Di Martino a Vito Caravelli*, il Prof. F. Amodeo ha pubblicata una memoria, estratta dal T. VII, 2.ª Serie, degli Atti dell'Accademia Pontaniana, facente seguito alle altre intitolate *Stato nelle matematiche a Napoli dal 1650 al 1732* (Atti Vol. VI e VII) e *Le riforme universitarie di Carlo III e Ferdinando IV di Borbone*. Quella come queste attestano lo zelo e la diligenza spiegate dall'autore per rievocare la memoria dei matematici che videro la luce nella terra in cui egli ebbe i natali; quella come queste verranno consultate anche in avvenire da coloro che vorranno sapere in qual modo ed in quale misura venissero coltivate ed insegnate le scienze esatte nel Regno di Napoli sotto il dominio dei Borboni. Forza è però constatare come gli sforzi dall'A. fatti per porre in luce le benemerenze scientifiche dei matematici napoletani di quel tempo non sortirono risultati di entità considerevoli, ma la colpa non è certo sua.

Una questione interessante che egli non trattò è di sapere come mai siffatta scarsità di opere originali abbia avuto luogo a Napoli in un'epoca in cui nel resto d'Italia fiorivano i Riccati ed i Fagnano, i Manfredi ed un Guido Grandi; i confini del bel Reame erano dessi così gelosamente guardati che i concetti ed i metodi in allora escogitati, non potevano penetrarvi ed esercitarvi influenza benefica? E come mai le scoperte e le opere didattiche di Eulero e dei Bernoulli, ammirate ed imitate in tutta Europa (non esclusa l'Italia settentrionale) poterono restare ignote o infeconde nel Mezzogiorno della penisola? Tali problemi s'impongono a qualunque storico, il quale comprenda come sia impossibile fare una pittura espressiva dello stato scientifico di un paese in un dato periodo, senza tener conto di quello

Digitized by Google

che nello stesso tempo operavano e scrivevano gli altri scienzati dello stesso paese. Di essi l'autore nostro non giudicò opportuno occuparsi, preferendo raccogliere i titoli anche delle opere minori dei matematici che fiorirono, o soltanto nacquero, ma non vissero, nel Regno di Napoli. Sopra uno però egli è di un laconismo che, trattandosi forse del più eminente è deplorevole: alludiamo a Giulio Mozzi, autore di quel *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi* (Napoli 1763), ove è stabilita una proposizione fondamentale di cinematica, che venne nel dominio del pubblico soltanto quando, nel 1830, M. Chasles la riscoperse. Se l'A. vorrà ritornare sopra questo punto del suo lavoro e fornirci dati sicuri su quell'egregio scienziato, colmerà una deplorevole e deplorata lacuna esistente nella storia della matematica italiana (1).

* * *

Nicola Chuquet. — La pubblicazione fatta nel 1880 di A. Marre del *Triparty en la science des nombres* (v. *Bullettino* del Boncompagni, T. XIII) mise in luce i meriti, sino allora misconosciuti, del Chuquet; ora un erudito belga, il P. Ch. Lambo, ha dedicato a questo ed alle sue opere un diligentissimo lavoro (*Une algèbre française de 1484. Nicolas Chuquet* nella *Revue des questions scientifiques* dell'Ottobre 1902), il quale varrà certo a diffondere la conoscenza dell'uno e delle altre. Esso però, come le ricerche anteriori di M. Cantor, non ha il potere, nè la pretesa, di risolvere tutte le questioni collegate alle origini dell'Algebra francese, questioni fra cui primeggia quella di sapere in qual misura questa debba considerarsi per una derivazione dell'Algebra italiana. E tali questioni, di così vitale interesse, rimarranno insolute fino a che i manoscritti di Guglielmo de Lunis, di Filippo Frescobaldi e d'altri, conservati (o per meglio dire sepolti) nelle Biblioteche di Firenze e di altre sedi importanti, verranno lasciati indisturbati a continuare nel loro sonno secolare. Quando dunque, gli eruditi italiani si decideranno a occuparsi delle loro glorie più care, a rispondere alle domande che da ogni parte del mondo vengono loro rivolte?

(1) Aggiungiamo che l'incompleta considerazione delle opere straniere contemporanee a quelle studiate dall'A. gli vietò di avvertire qualche fatto, che pure avrebbe meritato di essere riferito. Ad esempio, nel §. 5 della prima memoria dell'Amodeo è citato un problema proposto da Ruggiero di Ventimiglia; ma non andava notato che di esso diede una completa soluzione il marchese de l'Hôpital, il quale la diffuse in tutto il mondo col suo celebre *Traité analytique des sections coniques*?

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1903.

Digitized by Google

ANNO VI. OTTOBRE, NOVEMBRE E DICEMBRE 1903.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

M. LAZZARINI: *Leonardo Fibonacci, le sue opere e la sua famiglia.*

Recensioni ed annunzi: F. KLEIN, *Anwendung der Diff.- und Integralrechnung auf die Geometrie* [G. Vivanti]. — E. WOLFFING, *Mathematischer Bücherschatz* I. [G. L.]. — HENSEL und LANDSBERG, *Theorie der alg. Functionen* [B. Levi]. — MELLOR, *Higher mathematics* [G. L.]. — STUDY, *Geometrie der Dynamen*. I. [E. Daniele]. — HOLZMÜLLER, *Meth. Lehrbuch der Elementarmathematik*. III. [G. L.].

Notizie: Antonio Arnaud. — Tema proposto dall'Accademia di Berlino. — Un progetto bibliografico. — Progetto di un'edizione di Leibniz. — Accademia del Belgio. — Schweins e Hesse. — Influenza della tecnica sopra lo sviluppo della meccanica. — Temi di concorso. — Pubblicazioni recenti sulla storia della matematica. — Nomografia.

Con l'improvvisa e deplorata morte di **Luigi Cremona**, avvenuta in Roma addì 10 Giugno, i geometri italiani perdono Colui che unanimi salutavano loro capo e che gli stranieri da un trentennio consideravano come il più eminente rappresentante di un indirizzo di studio caratteristico per l'Italia. Delle Sue numerose opere matematiche — su cui la storia ha già pronunziato il suo inappellabile giudizio, collocandole fra i classici delle scienze esatte — il nostro *Bollettino* terrà parola al più presto possibile. Ma nel momento in cui ci abbandona il Discepolo prediletto di Francesco Brioschi, l'Amico fedele di Eugenio Beltrami, il cordoglio che produce la Sua scomparsa altro non ci consente che spargere lacrime e fiori sulla Sua tomba troppo presto dischiusa.

Luglio 1903.

Digitized by Google

LEONARDO FIBONACCI,

LE SUE OPERE E LA SUA FAMIGLIA

DI

MARIO LAZZARINI

1. Gli antenati di Leonardo.

La famiglia Pisana dei *Bonacci* o *Fibonacci*, da cui poi le altre dei *Bonagi dell'Abbaco* e *dell'Abbaco*, o *dell'Ambaco*, esisteva in Pisa fino dal Secolo XI, e traeva forse origine da un tale *Bonito*, morto, come risulta da una carta di vendita dell'11 gennaio 1109, nei primi del 1100, e padre di *Giovanni* e di *Bonaccio* (1). Quest'ultimo fu padre di *Alberto*, e, con assai verosimiglianza, anche di *Guglielmo* (padre di Leonardo), e di quel *Mattheus de Bonaccis*, che fu uno dei mille cittadini pisani, che conclusero la pace coi Genovesi per ordine del papa Clemente III, mediatore ed arbitro di essa, il 13 febbraio 1188 (2).

2. Leonardo.

Di Leonardo ci rimangono due sole memorie sincrone, l'una del 1241 pubblicata da F. Bonaini, l'altra del 28 agosto 1226 pubblicata da G. Milanesi: l'una e l'altra di queste memorie però, della massima importanza per la vita del grande Pisano, se sono conosciute dagli studiosi di araldica e di storia pisana, sono, per quante ricerche abbia fatte, completamente sconosciute agli storici della matematica, che di Leonardo si sono occupati.

Principierò dalla seconda, come quella che ci dà notizia del padre e del fratello di Leonardo. Essa è un istrumento di compra, in data del 28 agosto 1226, dal quale risulta che *Guglielmo*, padre di Leonardo, ebbe un altro figlio di nome *Bonaccingo*, e che Leonardo *Bigollo* comprò, come procuratore di questo suo fratello, da Bartolomeo di Alberto di Bonaccio la dodicesima parte di un pezzo di terra, con

(1) Questa carta di vendita è stata pubblicata dai Padri Mittarelli e Costadoni nell'Appendice N.° CXLVI dei loro *Annales Camaldulenses* (Tomo III, Venezia 1755-1760). — Essa termina con le seguenti parole: « Signum de manibus Raineri filio quondam Bernardi, Johannes filio quondam Boniti, Bonaccio quondam Boniti testes ».

(2) V. *Raccolta di scelti diplomi Pisani*. fatta dal Cav. F. Dal Borgo, Pisa MDCCLXV.

Digitized by Google

torre ed ogni suo edificio e pertinenza, posto in Pisa, fuori della città, nella cappella di S. Pietro in Vincoli.

Questo documento, importante anche perchè in esso si trova già unita al nome di Leonardo la parola *Bigollo*, ci mostra chiaramente che tutti coloro, i quali scrissero di Leonardo, andarono errati in ciò che affermarono intorno al padre di lui.

Leonardo dunque nacque in Pisa, nel Quartiere di mezzo, da Guglielmo di Bonaccio, uomo dedito al commercio e ricoprente la carica di *publicus Scriba* nelle dogane dello Stato Pisano. Si ignora quali esattamente fossero le attribuzioni di tale ufficio; così, mentre il Tiraboschi e il Guglielmini lo dicono corrispondente a cancelliere e il Targioni a notarius, il P. Grimaldi invece dice che « il publicus scriba era quel personaggio che, nei porti di maggiore commercio, promuoveva i nazionali vantaggi, rappresentava il supremo potere, e presiedeva al maneggio di tutti gli affari »: in ogni modo, in quei tempi, tale ufficio era certo dei più ragguardevoli.

Non si sa con precisione l'anno della nascita di Leonardo, ma dalle date delle sue opere e dalle vaghe indicazioni che in esse egli ci dà della sua vita, risulta manifesto che egli nacque verso il 1170, e che per conseguenza, al tempo della conclusione della pace fra Pisa e Genova, era poco più che giovinetto. Verso questo tempo appunto suo padre fu mandato, nella sua qualità di publicus scriba, nella dogana pisana di Bugia, città di Barberia, situata, come ci dice il Grimaldi, alle coste dell'Africa, fra il Bastione di Francia e Algeri. Per le relazioni continue che il publicus scriba aveva coi commercianti che lì affluivano da ogni parte dell'Africa, Guglielmo di Bonaccio venne a cognizione del modo di contare degli Arabi, e considerando l'utilità e il vantaggio di tal metodo in confronto degli altri allora usati in Europa, chiamò a sè Leonardo fanciullo (in pueritia) (1) e volle che attendesse allo studio dell'Abbaco. A Bugia Leonardo non si trattenne lungo tempo (per aliquot dies), ma abbastanza perchè, introdotto, come egli ci dice, nel mirabile magistero dell'arte per mezzo delle cifre arabe (per novem figuras indorum), se ne innamorasse, e ne facesse lo scopo dei suoi studi e delle sue ricerche. A ciò aiutavanlo le condizioni sue e dei suoi tempi, giacchè dovendosi, per ragioni di commercio (negotiationis causa), recarsi in paesi lontani e diversi, poteva più facilmente venire a conoscenza di quanto allora si sapeva di matematica. Recatosi così in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza, vale a dire in tutti quei luoghi che erano allora il centro degli studi e della cultura, pur non trascurando i commerci, scopo

(1) Queste indicazioni sulla prima parte della vita di Leonardo ci sono fornite da Leonardo stesso, nel prologo del suo *Liber Abbaci*.

Digitized by Google

precipuo dei suoi viaggi, dopo lunghi studi, fatti con gran diligenza e fatica, potè dire di conoscere tutto quanto di matematica si sapeva in quelle diverse scuole. Tutto questo però non bastava a lui, che aveva già intraveduto gli immensi vantaggi che si potevano recare alle matematiche coll' introduzione del metodo degli Arabi, così eccellente, come egli ci afferma, da riputare tutto il resto un errore; per cui, approfonditosi sempre più nello studio di detto metodo (amplectens strictius ipsum modum indorum et attentius studens in eo), ed aggiuntevi ricerche proprie e di Euclide, potè finalmente riassumere, nel 1202 (1), i suoi lavori in quell'opera meravigliosa, considerando specialmente i tempi in cui è stata composta, che è il *Liber Abbaci.* Niente si sa di questa prima edizione dell'Abbaco: è certo però che essa dovette sommamente interessare i matematici del tempo, se, molti anni più tardi, e precisamente verso il 1225, Michele Scott gliene richiese copia. Per soddisfare al desiderio dell'amico, Leonardo riprese il suo lavoro, e, valendosi delle nuove ricerche che aveva già pubblicate nella *Practica geometriae* (1220), nel *Flos* e nel *Liber Quadratorum* (1225), potè aggiungervi nuovi teoremi e problemi, togliendovene altri da lui forse ritenuti ormai superflui, in modo da compiere il *Liber Abbaci* come è a noi pervenuto. Quando ciò sia avvenuto è incerto; ma, osservando che nell'Abbaco si cita più volte la *Practica Geometriae,* e questa porta, come abbiamo detto, la data del 1220, è evidente che questo rifacimento deve essere posteriore a detto anno, e compreso fra il 1220 e il '50: il Libri e il Cantor, appoggiandosi specialmente all'intestazione di un codice riportata dal Libri (2), inclinano a credere che questa seconda edizione fosse compiuta nel 1228.

Ora, chi era questo Michele Scott, al quale Leonardo dedicò il suo lavoro? Diverse sono le persone di questo nome: secondo il Toppi e il Mazza, uno fu astrologo salernitano; un secondo è fiorentino, come si rileva da un passo del Lami (3); di un terzo si dice da Giovanni Baleo (de Script. Anglis) e dal Pitseo (de rebus Anglis) che era inglese: un quarto finalmente, e questi è, colla maggior probabilità, quegli cui Leonardo dedicò il suo Abbaco, fu veramente scozzese. Questi nacque verso il 1190 in Balwearie in Scozia, e fu astrologo alla corte dell'imperatore Federico II. Egli soggiornò per studi in Parigi e

(1) Si noti che tutte le date riportate qui ed in seguito, relative alle opere di Leonardo, sono, come dimostro più avanti, computate secondo il calendario Pisano, vale a dire posticipate di un anno, due mesi e 25 giorni rispetto al computo comune.

(2) Libri II, 24 Nota 2: « Incipit liber Abaci a Leonardo filio Bonacci compositus anno 1202 et correctus ab eodem anno 1228 ».

(3) « .... in quorum fine versus quidam Magistri Michaelis Scoti de Florentia leguntur ».

Digitized by Google

nella Spagna, e verso il 1217 era in Toledo, dove si occupava di Astronomia. Verso questo tempo appunto fu coll'imperatore, e con lui venne in Italia. Tradusse in latino alcuni degli scritti di Aristotile e pubblicò l'*Almagesto*. Alla morte dell'imperatore, nel 1250, si recò poi in Inghilterra alla corte di Edoardo I, dove restò fino alla morte (1).

Il *Liber Abbaci*, nella sua seconda edizione, è diviso in quindici capitoli.

Senza entrare qui in una minuta analisi dell'*Abbaco*, ne darò un piccolo cenno, specialmente riguardo all'ultimo capitolo, che è, senza dubbio, il più importante di tutta l'opera.

Premessa dunque un'esposizione dell'Aritmetica Indiana od Araba, e la risoluzione di un gran numero di questioni commerciali, Leonardo espone, nell'ultimo capitolo, il suo trattato di Algebra. È questo diviso in tre parti: la prima è relativa alle proporzioni, la seconda alla geometria, la terza all'algebra propriamente detta. In quest'ultima Leonardo dà, sul principio, denominazioni e definizioni prese dagli Arabi: il quadrato dell'incognita vi è chiamato *census*, traduzione dell'arabo *Mal;* così, la prima potenza dell'incognita è chiamata *cosa*, versione pure di un vocabolo arabo, da cui i Tedeschi derivarono *die Coss*, nome col quale in origine designarono l'Algebra.

Leonardo considera quindi sei questioni, di cui tre semplici e tre composte, e successivamente le risolve, ed è così condotto all'equazione di 2.° grado. Egli comincia sempre col dare esempi numerici e quindi enuncia le regole generali, senza dimostrazione. In tutti i casi che esamina, egli, seguendo l'esempio degli Arabi, suppone tutti i termini positivi in ambo i membri, giacchè, a quel tempo, non si eguagliava ancora a zero il primo membro dell'equazione. La dimostrazione viene in ultimo: è una costruzione geometrica, con la quale si aggiunge ai due membri dell'equazione il quadrato della metà della prima potenza dell'incognita.

Altro merito di Leonardo è quello di avere, per il primo, adoperato nella notazione algebrica le lettere dell'alfabeto nel modo moderno.

Nell'Algebra degli Arabi non si considera d'ordinario che una sola fra le radici dell'equazione di 2.° grado, sebbene Mohammed-ben-Musa indichi l'esistenza delle due radici, nel caso che siano ambedue positive. Leonardo imitò Mohammed, spingendosi però meno innanzi di lui: dice infatti che, se non si risolve una certa equazione di 2.° grado aggiungendo il radicale alla quantità razionale, essa si risolverà togliendo il radicale stesso.

La seconda delle opere maggiori di Leonardo, e dico seconda

(1) V. Cantor: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Zweiter Band, Kap. XII, XIII.

Digitized by Google

tanto rapporto al tempo quanto all'importanza, è la *Practica geometriae*, composta, come egli ci dice (1), nell'anno 1220 ad istanza dell'amico *Maestro Domenico* ed a lui dedicata.

Di questo M.° Domenico si sa che fu un astrologo amico e contemporaneo di Guido Bonatti, conosciuto comunemente sotto il nome di *Dominicus Hispanus*. A preghiera di lui dunque, Leonardo compì e pubblicò quest'opera, già cominciata molto tempo innanzi, perchè, come dice egli stesso nel prologo, « coloro che vogliono trovare le dimensioni dei corpi secondo dimostrazioni geometriche, e coloro che le vogliono trovare secondo l'uso volgare (quasi laicali more), abbiano in essa un ammaestramento perfetto ».

Detta opera è divisa, oltre l'introduzione, in otto parti, nelle quali Leonardo si occupa specialmente della misura dei corpi, inserendovi pure ricerche algebriche. Fra i teoremi in essa contenuti merita menzione quello di trovare l'area di un triangolo, dati i tre lati, i diversi metodi pratici usati dagli agrimensori per trovare la superficie di qualunque poligono e la lunghezza di un arco, la semplificazione del metodo di Archimede pel calcolo di π, e le misure delle altezze e delle profondità per mezzo del quadrante. Alcuni manoscritti della *Practica geometriae* contengono poi dei saggi di analisi indeterminata, e tanto quest'opera come l'*Abacus* racchiudono gran numero di problemi curiosi e rapporti di misure e monete dei diversi popoli coi quali commerciavano in quei tempi i Pisani; vi si vedono, fra altro, indicate poi chiaramente le lettere di cambio.

(*continua*).

RECENSIONI ED ANNUNZI

F. Klein - *Anwendung der Differential - und Integralrechnung auf Geometrie; eine Revision der Principien.* Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von C. Müller. Leipzig, Teubner, 1902. 468 p. litogr.; copertina, prefazione ed indice a stampa (8 p.) 8°.

Questo corso di lezioni non ha, crediamo, alcun riscontro nella letteratura matematica antica o moderna. Con esso l'autore, come dice egli medesimo, ha voluto fare un nuovo passo nell'opera da lui intrapresa di attenuare i danni della odierna eccessiva specializzazione

(1) Incipit practica geometriae composita a Leonardo Pisano de filiis Bonaccii, anno M°.CC°.XX°.

Digitized by Google

cercando di abbattere le barriere che dividono la matematica teorica da quella applicata. Purtroppo anche in Italia tali barriere sono più alte e più insormontabili che mai; ed è perciò che noi applaudiremmo all'editore coraggioso che pensasse a pubblicare per la stampa, tradotte in italiano, le interessantissime lezioni di Klein. Tornando alle quali, diremo che esse tendono essenzialmente a porre in luce le differenze e i rapporti reciproci esistenti tra la *matematica di precisione* e la *matematica d'approssimazione*. Più particolarmente, Klein si occupa di stabilire un confronto tra gli enti matematici, e specialmente geometrici, quali risultano dalle definizioni della teoria, e gli enti che si ottengono mediante *idealizzazione* degli oggetti del mondo reale. Ciò che segue farà meglio comprendere questo concetto.

* * *

Ogni operazione materiale di natura matematica — disegno, misura, calcolo numerico, ecc. — ammette un grado determinato, più o meno elevato secondo i casi, di precisione. Al contrario l'aritmetica teorica definisce il numero (p. es. in forma di frazione decimale) con un grado d'approssimazione indefinito, e chiama eguali due numeri quando la loro differenza può dimostrarsi minore di qualunque grandezza assegnata; e parimenti la geometria definisce le sue figure con assoluta esattezza. Così, mentre un cerchio tracciato effettivamente è un anello di spessore più o meno grande, i cui punti si trovano, press'a poco, alla stessa distanza da una piccola macchietta o da un piccolo foro che chiamiamo centro, il cerchio della geometria è una linea, cioè un ente ad una sola dimensione, i cui punti hanno, rigorosamente, egual distanza da un certo punto, cioè da un ente privo come essi di alcuna estensione. V'ha luogo perciò a distinguere la matematica di precisione e quella d'approssimazione; la prima opera su enti rigorosamente definiti, cioè perfettamente individuati mediante un certo numero di proprietà ad essi caratteristiche, la seconda su enti conosciuti solo con una certa approssimazione. Così, quando dimostriamo un teorema di aritmetica o di geometria, noi facciamo della matematica di precisione; quando eseguiamo un calcolo numerico, noi facciamo della matematica di approssimazione, o, più esattamente, se p. es. operiamo su un numero x conosciuto sino alla r-esima cifra decimale, noi applichiamo i metodi della matematica di precisione al numero $\frac{E(10^r \cdot x)}{10^r}$, dove $E(t)$ rappresenta il massimo intero contenuto in t. Sicchè, in sostanza la matematica di approssimazione non è una scienza approssimata, ma una scienza che opera esattamente su grandezze conosciute soltanto con una data approssimazione. Parimenti abbiamo la geometria di precisione, dove — come

Digitized by Google

osservavamo poc'anzi — il punto è inesteso, la linea ha una dimensione sola, due rette si tagliano al più in un solo punto; ed abbiamo quella d'approssimazione, dove un punto è un corpo di dimensioni trascurabili, le linee sono strisce di larghezza trascurabile, due rette in un piano determinano un punto tanto meno inesattamente quanto maggiore è la loro reciproca inclinazione, e così via. Qual è pertanto il vero significato dell'applicazione, che tacitamente da tutti si ritiene lecita, dei risultati della geometria esatta ai problemi della geometria pratica? Definire un ente in modo approssimativo vuol dire assegnare un determinato campo entro il quale esso è certamente compreso; eseguire una operazione matematica su di esso significa determinare esattamente i limiti entro i quali starà corrispondentemente il risultato dell'operazione stessa. Gli enti su cui opera la matematica astratta sono dunque, in qualche modo, i limiti di quelli che ci sono forniti dall'osservazione; hanno origine da un processo di idealizzazione operato su di questi. È perciò che le definizioni e i postulati della matematica, per quanto, in senso stretto, non abbiano alcun rapporto colla realtà, sono però suggeriti da questa. Così il postulato di Dedekind, il quale stabilisce che ad ogni punto d'una retta (fissata l'origine e l'unità di misura) corrisponde uno ed un solo numero reale, ci è suggerito dal fatto che noi, con quell'approssimazione che ci è concessa dai nostri mezzi, possiamo misurare qualunque dato segmento. Naturalmente la matematica astratta si serve dell'intuizione soltanto come di un aiuto e di un mezzo euristico, procedendo del resto per via rigorosamente logica; sicchè le sue definizioni e i suoi risultati trascendono sovente il nostro potere d'osservazione. Così noi non possiamo figurarci come un insieme di punti denso in tutto un intervallo non comprenda tutti i punti di esso. Così la distinzione fra commensurabile e incommensurabile non ha alcun significato nel campo pratico; sicchè, quando, per esempio, gli astronomi dicono che due grandezze sono commensurabili, deve intendersi soltanto che il loro rapporto è esprimibile, nei limiti d'approssimazione ordinari, mediante una frazione a termini abbastanza piccoli. Così la questione, se un dato problema sia risolubile colla riga e col compasso, non ha ragione di esistere nella geometria operativa, giacchè colla riga e col compasso può risolversi *approssimativamente* qualunque problema.

Conviene ora esaminare che cosa significhi la parola *funzione* nella matematica astratta e in quella empirica. Funzione in senso astratto è un insieme di valori y assegnati come corrispondenti rispettivamente ai valori x di un certo intervallo. In pratica invece una funzione è rappresentata da una linea, o da una serie più o meno discontinua di punti, riferite ad una coppia d'assi coordinati; ed è a considerarsi che, anche quando ci sembra di aver dinanzi una linea

Digitized by Google

continua, non abbiamo che una serie discontinua di punti, come potremmo accertarcene col microscopio. Di più i valori di y non sono dati che con una certa approssimazione, ossia fra certi limiti, onde può dirsi che non è già data una *linea*, ma piuttosto una *striscia*. Le proprietà che noi attribuiamo alle curve empiriche sono: di essere continue; di racchiudere colle ordinate estreme e coll'asse delle ascisse un'area determinata; di avere in ogni intervallo finito un numero finito di massimi e di minimi; di avere direzione e curvatura determinate in ogni punto. Ora la matematica astratta attribuisce appunto queste qualità, dopo averle definite in modo rigoroso, alle sue curve ideali; con ciò restano escluse tutte le curve che sono prive di tutte o di parte di queste proprietà (quale p. es. quella che rappresenta la funzione di Weierstrass), e vien delimitato un campo speciale di funzioni, quello delle funzioni *ragionevoli* (*vernünftige Functionen*).

Ed ora si domanda: Data una curva empirica, come si può trovare una curva astratta che le si approssimi il più possibile? Per ottenere una funzione astratta, continua e due volte derivabile, che rappresenti una curva empirica data L, segniamo, coll'approssimazione concessaci dai mezzi di cui disponiamo, la linea L_1, le cui ordinate rappresentano i valori di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nei varî punti della curva data, poi una seconda linea L_2 avente con L_1 lo stesso rapporto che ha L_1 con L. Inscriviamo in L_2 una spezzata, integriamo due volte la funzione che la rappresenta; otterremo la funzione cercata.

Talvolta interessa avere la rappresentazione d'una curva empirica sotto una forma analitica determinata. Le forme di uso più frequente sono i polinomi e gli sviluppi trigonometrici. Per semplificare il problema, l'autore imagina di avere, non già una curva empirica, ma una curva astratta che imagina sin da principio sostituita a quella e scelta in modo da rappresentarla il meglio possibile.

Per la rappresentazione mediante polinomi si ha anzitutto la formola di Lagrange; l'autore calcola l'errore di questa formola, quello del suo integrale e quello della sua derivata. Passa poi agli sviluppi trigonometrici finiti ed infiniti, insistendo sull'importanza della valutazione del resto, ed accennando agli apparecchi denominati *analizzatori armonici*.

Le cose dette si estendono, con pochi mutamenti, alle funzioni di due variabili; per queste si ottengono sviluppi in serie di funzioni sferiche. Fra le molte interessanti osservazioni che si trovano intorno alle funzioni di due variabili, ricordiamo la seguente. Ognuno sa che non sempre è lecita l'inversione dell'ordine delle derivazioni, e che furono costruiti esempi di funzioni per le quali tale inversione non può farsi. Orbene, è degno di nota che fra le superficie considerata

Digitized by Google

nell'architettura ve n'ha una tale, che la superficie astratta a cui essa conduce per idealizzazione rappresenta appunto una funzione di due variabili della natura accennata. Tale è la superficie d'una volta a crociera; riferita a 3 assi ortogonali x, y, z, di cui i due primi orizzontali e non simmetricamente disposti rispetto alla volta, essa è l'imagine d'una funzione z di due variabili x, y, le cui derivate miste di 2.° ordine pei valori di x, y corrispondenti al vertice della volta non sono tra loro eguali.

Dobbiamo ora far cenno di un'importante digressione filosofica.

Da molti si è ripetuto e si ripete che in natura esistono soltanto funzioni analitiche. Questa asserzione trova la sua origine essenzialmente nella presunzione della regolarità e della continuità dei processi naturali. Ma in realtà l'osservazione non può decidere se le funzioni che rappresentano i fenomeni naturali sieno o no analitiche; giacchè essa non determina tali funzioni con esattezza, ma solo con una certa approssimazione. Una curva effettiva, come già si disse, non è una linea, ma bensì una striscia; ogni linea tracciata entro tale striscia può egualmente rappresentarci il fenomeno, e sta nell'arbitrio di chi vuole studiarlo matematicamente di scegliere la linea in modo che abbia o non abbia determinate proprietà (continuità, esistenza della tangente, ecc.). La questione, se i processi naturali sieno analitici, esce dal campo dell'osservazione, ed appartiene alla metafisica, in seno alla quale si trova strettamente legata ad una questione fondamentale. Consideriamo p. es. il moto d'un punto materiale, definito mediante l'espressione delle coordinate del punto come funzioni del tempo. Se tali funzioni sono analitiche, la conoscenza d'un elemento della traiettoria basta a determinare l'intera traiettoria; e così si è condotti al più completo *determinismo*. Volendo evitare questa conclusione, che molti non sono disposti ad accettare, si può supporre che il moto sia definito da equazioni differenziali a coefficienti analitici. Allora, benchè le condizioni iniziali determinino, sino ad un certo punto, la curva integrale, tuttavia, se questa ha un punto comune con un'altra curva integrale — come avviene p. es. tra ogni integrale particolare e l'integrale singolare —, le leggi meccaniche non sono sufficienti a stabilire quale delle due curve seguirà il mobile da quel punto in avanti. Ma tutta questa discussione evidentemente è fondata sull'arbitrario, giacchè con egual ragione si potrebbero supporre le x, y, z funzioni discontinue, non derivabili, ecc. del tempo, purchè atte a rappresentare con sufficiente approssimazione il fenomeno reale.

* * *

Fin qui il nostro autore ha fatto dipendere i concetti geometrici dall'idea di funzione, riferendosi naturalmente ad un determinato sistema di coordinate.

Digitized by Google

Nella seconda parte egli tratta della *geometria libera* (*freie Geometrie*), cioè di quelle questioni geometriche che sono indipendenti da qualunque sistema di riferimento. Merita di essere ricordata innanzi tutto in questo rapporto la teoria degli aggregati, teoria assai più geometrica che aritmetica, giacchè gli aggregati di punti si presentano spontaneamente in varie ed importanti questioni geometriche. Basti citare la teoria dell'inversione, che ha una parte principalissima nello studio delle questioni automorfe, e che si applica pure nella elettrostatica; il problema della definizione del continuo geometrico; quello della determinazione del concetto di curva. A proposito di quest'ultimo concetto è interessante osservare che, definendo semplicemente i punti d'una curva piana in funzione d'un parametro, si possono ottenere risultati che ci portano assai lontano dall'idea comune di curva. P. es., se i raggi dei due cerchi generatori di una epicicloide sono incommensurabili, la curva, continuata indefinitamente, finisce per contenere un insieme di punti denso in tutto in certo spazio anulare. Così la curva di Peano contiene tutti i punti d'un quadrato. Pertanto, per ottenere una curva teorica che possa considerarsi come l'idealizzazione di una ordinaria curva reale, conviene assoggettare il concetto di curva a qualche limitazione; si giunge così alla definizione di Jordan di *curva regolare*, e per ogni curva empirica si può assegnare una curva astratta regolare che coincida con essa in tutte le proprietà fondamentali in quei limiti d'approssimazioni che sono possibili. I tipi più semplici di curve regolari sono le curve *analitiche;* fra queste sono da distinguersi le *algebriche;* fra queste ultime le *razionali.* Però anche certe questioni di pura geometria conducono a curve regolari non analitiche; e l'autore mostra con lunghi sviluppi come curve di questa natura si presentino nella teoria dell'inversione.

« Le questioni della teoria degli aggregati », conclude l'autore, » si presentano sempre, quando si studino abbastanza a fondo problemi » di matematica astratta ».

Ciò prova che, nella matematica astratta, conviene spingere innanzi quanto è possibile l'idealizzazione — e l'autore cita come esempio i numeri trasfiniti di Veronese —, ma prova anche che, in mezzo alla grande libertà concessa al matematico, egli, nelle sue idealizzazioni, deve lasciarsi guidare dal senso d'opportunità. Chi è libero, dice Klein, è nello stesso tempo responsabile.

Di fronte alla geometria astratta stanno, nel campo della matematica di approssimazione, da una parte la geodesia, dall'altra il disegno geometrico.

Nella geodesia si hanno basi ed inclinazioni misurate con una certa approssimazione, e da esse si deducono, col sussidio della geometria

Digitized by Google

pura, altre grandezze, di cui si può determinare l'errore massimo. Quanto al grado d'approssimazione delle misure ottenute ed alla scelta tra risultati discordanti, dobbiamo ricorrere al calcolo delle probabilità ed al metodo dei minimi quadrati. — Nell'alta geodesia si considera la terra come un ellissoide. Ciò è abbastanza esatto per una grande estensione di superficie terrestre; ma lo è tanto meno quanto più piccola è l'estensione considerata. Così, se si volesse ottenere il piano tangente in un punto della superficie della terra come luogo delle congiungenti quel punto coi punti contigui della superficie, non si arriverebbe a nessun risultato; tutte quelle congiungenti sarebbero ben lungi dal giacere in un piano, e le loro posizioni non tenderebbero, in generale, ad alcun limite all'avvicinarsi dei punti contigui al punto che si considera. Per avere un piano che possa riguardarsi, con una certa approssimazione, come il piano tangente, bisogna prendere il luogo delle congiungenti del punto coi punti che distano da esso di un tratto non troppo piccolo, p. es. di 10 chilometri. Così pure, invece di cercare di tracciare sulla superficie terrestre una *linea geodetica,* si deve costruire un *poligono geodetico,* cioè una spezzata rettilinea, di lati, p. es., di 10 chilometri, iscritta nella superficie terrestre, e tale che il piano di due lati successivi contenga la normale alla superficie nel vertice comune. È questo ciò che fanno effettivamente i geodeti. — Generalizzando alquanto queste ultime considerazioni, può dirsi che l'anello di congiunzione tra l'analisi infinitesimale e le sue applicazioni al mondo reale deve essere il calcolo delle differenze finite ragionevolmente sviluppato.

Nel disegno geometrico, che si distingue in *geometria descrittiva* e *calcolo grafico,* manca sinora una teoria degli errori, se pure non si voglia considerare come un avviamento ad essa la *geometrografia* di Lemoine. Per dare un'idea del modo in cui dovrebbero trattarsi teoricamente le questioni di geometria empirica, prendiamo il teorema di Pascal. La dimostrazione che si dà di esso nella geometria astratta non giustifica punto il fatto che, se noi disegniamo con una certa esattezza una conica ed iscriviamo in essa un esagono, i punti di concorso dei lati opposti cadono sensibilmente in linea retta. Questo fatto costituisce un teorema della geometria empirica, che deve essere dimostrato; e non è difficile far vedere che, se le coordinate dei 6 punti soddisfanno, con una certa approssimazione, all'equazione d'una conica, l'area del triangolo avente per vertici i tre punti di concorso accennati differisce di poco da zero. Vediamo qui un nuovo esempio del fatto che la matematica di approssimazione opera con metodi esatti su elementi approssimati. — Le cose dette fin qui spiegano come, e con quali precauzioni, si possa trar partito dalla considerazione intuitiva delle curve empiriche per stabilire proprietà delle curve

Digitized by Google

ideali; e l'autore applica diffusamente questo processo allo studio delle singolarità delle curve algebriche ed alla dimostrazione delle formole di Plücker.

Per le curve nello spazio e le superficie si può far uso, nello stesso senso, di modelli, come l'autore spiega su varî esempi.

* * *

Non crederemmo di poter meglio finire questa rivista che riportando le belle parole con cui Klein chiude il suo corso, tanto più che le idee in quelle vivacemente espresse sono le medesime a cui ci siamo sempre ispirati nell' insegnamento dell' Analisi infinitesimale: « Io ho esposto in questo corso ciò che di solito non si trova nei » trattati, ma che si presuppone tacitamente negli sviluppi ordinari. » Con ciò io ho voluto mettervi in grado di considerare le cose stesse » con occhio proprio e con giudizio indipendente. Riflettete p. es. a » ciò che io dissi sulle curve e superficie empiriche, e sull'arbitraria » limitazione ad enti analitici. — Nella matematica avviene come » nelle arti belle. È non solo utile ma assolutamente necessario ap- » prendere dai propri predecessori. Però, limitandoci *esclusivamente* » allo studio di ciò che fu fatto, fondandoci soltanto su ciò che leg- » giamo nei libri, ci riduciamo a ciò che io chiamo *sistema scola-* » *stico*. Torniamo dunque all' osservazione propria sul vivo, torniamo » alla natura, che rimane sempre la prima maestra! ».

G. Vivanti.

E. Wölffing. *Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichniss der wichtigasten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahruhnderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen.* I *Teil: Reine Mathematik.* 8.° pag, xxxvi + 416 [Prezzo del vol. leg. Mk. 15].

L' enorme produzione scientifica moderna, mentre da un lato rende sempre più pungente il bisogno di conoscere esattamente la somma di cognizioni che adunarono i nostri predecessori, rende dall'altro estremamente difficile il raggiungere tale intento, od anche solo avvicinarlo. Perciò qualunque nuovo ajuto ci sia per ciò fornito dev'essere salutato con gratitudine o gioia, specialmente quando provenga da persona nota per vasta e profonda cultura. In tali condizioni è appunto l' opera la cui *I Parte* oggi segnaliamo ai lettori nostri, i quali conoscono l' autore, oltrechè per altri scritti scientifici e bibliografici, per essere egli stato una volta collaboratore del *Bollettino* (1). Tale opera - lo dice il titolo -

(1) V. T. III, 1899, p. 97.

Digitized by Google

consta di un indice metodico dei lavori di matematica pura ed applicita che vennero pubblicati separatamente nel corso del Sec. XIX; la parte che ci sta sott' occhio abbraccia gli scritti di matematica pura; quella ventura conterrà i titoli delle opere sopra la teoria delle probabilità, il calcolo numerico, grafico e geometrico, la geometria descrittiva, la cristallografia, la mecannica, la fisica matematica, la geodesia, l' astronomia, la geofisica, la chimica, la biologia e la tecnica.

Come introduzione e per mostrare l' utilità della propria opera, l' A. fa una rassegna di tutte le pubblicazioni congeneri alla sua o che gli furono di maggiore ajuto nel suo lavoro, additando per ciascuna, sinceramente e serenamente, le qualità ed i difetti, non senza citare quelle a lui note, ma inaccessibili. I titoli registrati raggiungono il cospicuo numero di circa 13000, e sono ordinati per materie sotto 313 rubriche; opportuni richiami fanno conoscere quelle opere che con eguale diritto potrebbero entrare in due o più rubriche differenti. Chiudono l' opera un indice analitico ed un indice dei nomi (quest' ultimo comprendente quasi otto mila voci). Nulla dunque manca per rendere facile e comoda la consultazione di tale opera.

Un lavoro del genere di quello del Wolffing aspetta il suo giudizio dal tempo. Esso, per quanto redatto con cura, non può essere esente da errori e lacune; l' A. nè è perfettamente conscio e chiede a tutti di segnalargli le correzioni ed aggiunte che reputano necessarie, di cui egli terrà conto nel pubblicare la seconda parte. Senza arrestarci ad appunti minuti, due sole osservazioni faremo. Anzitutto molti degli scritti registrati dal Wolffing sono estratti da raccolte accademiche o da giornali, onde, per uniformità di metodo dovevano essere taciuti. In secondo luogo, perchè tener nota delle vane fatiche degli innumerevoli trisecatori dell' angolo o quadratori del circolo o dimostratori del postulato di Euclide? In tesi generale esse rappresentano per la scienza un' ingombrante zavorra, che sarebbe opportuno di eliminare; non potendola distruggere, la si lasci almeno cadere in dimenticanza!

G. L.

K. Hensel und G. Landsberg. *Theorie der algebraischen Functionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale* — Leipzig - Teubner - 1902, p. 707 + XVI. [Prezzo del vol. leg. Mk. 28].

Il confronto fra i corpi di numeri algebrici e quelli di funzioni algebriche d' una variabile condusse Kronecker per una parte, Dedekind e Weber per altra a trasportare a questi i metodi e i concetti che già s' erano mostrati fecondi nello studio di quelli. E particolarmente i due ultimi autori mostrarono in una memoria celebre come

Digitized by Google

ne uscisse nuova luce per tutta la teoria delle funzioni algebriche d'una variabile.

Nel volume di cui ci occupiamo gli A. allargano per quanto possibile il campo d'applicazione dei concetti contenuti in quella memoria; e dànno loro nuovo fondamento, abbandonando il metodo razionale che di quella memoria pare costituire la ragione determinante, e poggiando la teoria sugli sviluppi delle funzioni del corpo in serie di potenze della variabile. E a vero dire la condotta « puramente formale e colle sole regole del calcolo letterale » (1) era necessariamente in questa teoria solo apparente, dacchè elemento essenziale n'è la *risoluzione* di equazioni algebriche.

A conservare la forma puramente aritmetica anche all'introduzione degli sviluppi in serie, gli autori si valgono della nozione di congruenza di due funzioni, mod. una potenza della variabile. — Sia $f(u, z)$ un polinomio in u e z e sia n il suo ordine rispetto alla u. Mediante una generalizzazione del procedimento di Newton e della decomposizione in fattori lineari d'un polinomio in una variabile, si mostra che la congruenza $f(u, z) \equiv 0 \ (mod. \ (z - a)^M)$ ha n radici; le quali, crescendo M indefinitamente, dànno le n serie radici formali della $f(u, z) = 0$. Tosto però gli A. si occupano anche della convergenza di queste serie, con che si connettono alla teoria delle funzioni analitiche, alla loro continuazione, e son condotti alla costruzione della superficie di Riemann R_z su cui si distende la $u = u(z)$ definita da $f(u, z) = 0$ e le altre funzioni del corpo $K(u\ z)$, considerate come funzioni di z.

Si faccia ora corrispondere ad ogni punto P della R_z un simbolo $\mathfrak{p}$ *(divisore primo)* e si dica divisibile per $\mathfrak{p}^\rho$ una funzione che nel punto P abbia l'ordine ρ (positivo, negativo o nullo): ogni funzione del corpo si potrà allora, a meno di un fattor costante, rappresentare come prodotto dei suoi divisori primi di esponente $\neq 0$ (divisori corrispondenti ai zeri e ai poli della funzione), al qual prodotto conviene generalmente dar forma di frazione portando a denominatore i fattori d'esponente negativo. Questa rappresentazione simbolica (che ritrova la sua radice nella memoria di D. e W.) forma il nocciolo della teoria a partire da questo punto. Ma essa non sarebbe nulla più che una notazione abbreviata se il confronto di R_z colla superficie di Riemann corrispondente ad un'altra qualunque funzione del corpo, assunta come variabile indipendente, non assegnasse al concetto di divisore primo carattere invariantivo rispetto ad ogni cambiamento di variabile nel corpo. Perchè: si faccia corrispondere lo stesso divisore primo a punti di superficie di Riemann diverse in cui ciascuna funzione

(1) Dedekind u. Weber. Crelle's Journal 92 p. 235.

Digitized by Google

del corpo assuma lo stesso valore; poichè ogni funzione assume un valore ben determinato in ogni punto d' una superficie di Riemann del corpo, e viceversa fissati comunque due punti di questa esistono funzioni che in essi hannó valori differenti, non potrà mai appartenere indifferentemente a due diversi punti d' una superficie di Riemann uno stesso divisore primo, onde ne risulta pel divisore una definizione per astrazione, indipendente dalla scelta della variabile. Il divisore primo viene così a coincidere col *punto* di D. e W., a rispecchiare il *ramo* della geometria. Un prodotto di divisori primi si chiama *divisore* (1) (Divisor). I divisori si aggruppano in *classi*, appartenendo ad una stessa classe i divisori che divisi l' uno per l' altro producono divisori di funzioni del corpo: in particolare i divisori delle funzioni del corpo formano una classe, la *classe principale* o *classe unità*.

Ma accanto al concetto invariante di divisore, è pur necessario un elemento analogo, che si presti a caratterizzare quei fatti che sono intimamente connessi colla scelta della variabile indipendente (moduli, ideali, diramazioni). Perciò in ogni punto $z = \alpha$ del piano o sfera semplice su cui si distende la variabile si attribuisce a ciascuna funzione un *divisore* (2) (Teiler) ch' è la massima potenza di $z - \alpha$ per cui sono divisibili tutti gli sviluppi coniugati della funzione in quel punto.

I due concetti riuniti mostrano tosto la loro fecondità nello studio della diramazione di R_z e nella determinazione delle funzioni del corpo multiple di un dato divisore (cioè aventi dati zeri e i poli fra dati punti); onde è spianata la via alla determinazione e allo studio degli integrali abeliani ed al teorema di Riemann-Roch.

Sia $\mathfrak{P}_i$ il divisore primo corrispondente a un punto di diramazione di R_z e sia l_i il numero dei fogli di R_z che vi si rannodano. Si indichi con $\mathfrak{Z}_z$ il prodotto $\Pi_i \mathfrak{P}_i^{l_i - 1}$ esteso a tutti i punti di diramazione di R_z (o, se si vuole, a tutti i punti della superficie, poichè nei punti ordinari è $l_i - 1 = 0$). $\mathfrak{Z}_z$ si chiamerà *divisore di diramazione* relativo alla variabile z. Si indichi inoltre con $\mathfrak{n}_z$ il denominatore del divisore di z, cioè il prodotto dei divisori primi corrispondenti ai punti della superficie di Riemann nei quali $z = \infty$ (e si ricordi che la variabile z può essere una qualunque funzione del corpo).

Sia $d\omega = \zeta_\xi \, d\xi = \zeta_\eta \, d\eta$ un differenziale abeliano espresso rispettivamente nelle variabili ξ. η: la relazione $\zeta_\xi \, d\xi = \zeta_\eta \frac{d\eta}{d\xi} \, d\xi$ si

(1) *Poligono* di D. e W.: il divisore differisce dal poligono in ciò che quello e non questo ammette fattori con esponente negativo.

(2) Si rilevi il dupplice significato in cui qui usiamo il termine « divisore »; nel seguito questo termine ricorrerà soltanto nel primo significato.

Digitized by Google

esprime in $\zeta_\xi \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2} = \zeta_\eta \frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2} = \mathfrak{w}_\omega$, ove si indichino ancora con ζ_ξ, ζ_η i divisori delle funzioni ζ_ξ, ζ_η; e, come mostra l'espressione medesima di $\mathfrak{w}_\omega$, fra i divisori $\mathfrak{w}_\omega$ e i differenziali $d\omega$ esiste una corrispondenza biunivoca. I divisori $\mathfrak{w}_\omega$ forniscono così una rappresentazione dei differenziali abeliani invariante per cambiamenti di variabile nel corpo: i loro divisori primi del numeratore e del denominatore rappresentano i punti d'ordine > 1 (1) e gli infiniti del corrispondente integrale. Essi diconsi *divisori differenziali* e costituiscono una classe: fra essi i divisori interi (multipli del divisore $\mathfrak{q} = 1$) rappresentano gli integrali di 1.ª specie, mentre più generalmente la ricerca di quelli che sono multipli di un divisore qualunque $\mathfrak{q}$ — equivalente a quella delle funzioni del corpo multiple di $\mathfrak{q} \frac{\mathfrak{n}_z^2}{\mathfrak{Z}_z}$ — dà luogo al teorema di Riemann-Roch nella sua forma più generale, come una relazione fra i sistemi delle funzioni multiple dei divisori $\mathfrak{q} \frac{\mathfrak{n}_z^2}{\mathfrak{Z}_z}$ e $\frac{1}{\mathfrak{q}\,\mathfrak{n}_z^2}$ (il cui prodotto è $\frac{1}{\mathfrak{Z}_z}$: *sistemi complementari*). E al teorema di R. - R. si ritorna ancora dopo aver stabilite col metodo del Riemann le proprietà dei periodi degli integrali abeliani.

Siano x ed y due funzioni del corpo $K(u\ z)$ tali che $K(x\ y) = K(u\ z)$. Assumendo i loro valori associati come coordinate di un punto del piano, si definisce una curva algebrica. Il punto (a, b) si dice k-plo per essa se i numeratori dei divisori di $x - a$, $y - b$ hanno un divisor comune d'ordine k. Se $F(x\ y) = 0$ è l'equazione della curva ed m, n sono i suoi ordini in x e y, i divisori di $\frac{dF}{dx}$ e $\frac{dF}{dy}$ sono $\frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^{m-2}\,\mathfrak{n}_y^n}$, $\frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{Z}_y}{\mathfrak{n}_x^m\,\mathfrak{n}_y^{n-2}}$ dove fan parte del divisore $\mathfrak{D}$ tutti e soli i divisori primi dei punti multipli di F. $\mathfrak{D}$ si dice appunto *divisore dei punti multipli*. Ma questa nozione di punto multiplo differisce da quella projettiva: i punti della retta comune ai due fasci coordinati vi si riuniscono in un punto multiplo, mentre vi compaiono come punti distinti i vari rami con tangenti distinte, uscenti dai centri dei fasci:

(1) Vale a dire i punti in cui l'integrale, per conveniente determinazione della costante d'integrazione, ha zero d'ordine > 1.

Digitized by Google

alle nozioni projettive si giunge mediante l'introduzione di coordinate omogenee. Siano $x_0\ x_1\ x_2$ tre funzioni del corpo tali che il corpo $K\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$ sia identico al corpo $K(x\ y)$ — più generalmente siano $x_0\ x_1 \ldots x_s\ s+1$ funzioni del corpo tali che $K\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_s}{x_0}\right) = K(x\ y)$. L'insieme dei punti di uno spazio ad s dimensioni che hanno come coordinate omogenee valori corrispondenti di queste funzioni è una curva algebrica. I divisori delle x_i, ridotti allo stesso denominatore, potranno scriversi nella forma $\mathfrak{M}\ \mathfrak{A}_i$ dove gli $\mathfrak{A}_i$ sono divisori interi primi fra loro. L'insieme dei divisori della forma $\Sigma\ c_i\ \mathfrak{A}_i$ (divisori delle funzioni $\Sigma\ c_i\ x_i$, liberati dal fattore $\mathfrak{M}$) si dice una *schiera* di divisori. La schiera si trasforma in se stessa per sostituzioni lineari intere; essa rispecchia così le proprietà projettive della curva. Dalla schiera individuata dalle funzioni x_i altre se ne deducono — i rapporti dei cui divisori rappresentano ancora funzioni le cui combinazioni razionali ricoprono il corpo — considerando le funzioni (differenziali) rappresentate dai determinanti estratti dalle matrici $/\ x_i\ d\,x_i\ \ldots .\ d^k\ x_i\ /$. » Sono queste le coordinate tangenziali (omogenee) della curva considerata come inviluppo degli spazi di k dimensioni a contatto k-plo colla curva: il calcolo dei loro divisori mostra come vi entrino come fattori comuni i divisori i cui fattori primi corrispondono ai punti in cui spazi tangenti minori hanno contatto maggiore dell'ordinario e dal calcolo degli ordini di questi divisori seguono le formole di Plücker, di Cayley, di Veronese.

In una schiera possono sempre trovarsi, ed in infiniti modi, tre divisori tali che i rapporti di due di essi al terzo definiscono un corpo identico a $K(x, y)$ (proiezione semplice della curva sul piano). Il M C D dei divisori $\mathfrak{D}$ relativi a tali coppie di funzioni, sufficientemente generiche, costituisce il *divisore dei punti doppi della curva in senso projettivo,* mediante il quale si esprimono e si dimostrano in modo semplice ed elegante i teoremi del Noether circa la completezza delle serie segate su una curva da curve e superficie aggiunte (1), e la formola di postulazione senza portare in considerazione (per la curva spaziale) la residua intersezione di due superficie per essa e quindi indipendentemente dalla irreduttibilità di questa: non così nelle dimostrazioni note di Noether e Picard (2).

(1) Superficie passanti pei punti multipli della curva e d'ordine sufficientemente elevato. Mi permetto la denominazione di superficie aggiunte in senso un po' diverso dall'ordinario: ordinariamente la superficie aggiunta è obbligata a passare per la residua intersezione di cui si parla più sotto nel testo: ma questa curva medesima non è determinata.

(2) Gli A. non trattano in generale il caso della curva iperspaziale, ma solo quello della curva gobba e della curva canonica. Osservano però che la trattazione

Digitized by Google

L'applicazione di queste considerazioni geometriche alla curva principale (canonica) conduce notoriamente alle nozioni di punti di Weierstrass e di moduli del corpo, al Lückensatz e al teorema di Schwarz sulle trasformazioni birazionali d'una curva in sè. Ai metodi seguiti dal Weierstrass nelle sue Lezioni sono destinate le ultime lezioni. E in tal modo si riconosce sotto un'altra veduta la strada fatta, ripercorrendola per così dire in senso opposto. Perchè le proprietà della curva canonica, il Lückensatz erano derivati dalle proprietà degli integrandi abeliani, dal teorema di Riemann-Roch: si assume ora come variabile una funzione con un unico polo d'ordine n e si ricalcolano con essa gli integrandi di 1.ª e 2.ª specie, onde deriva una corrispondenza biunivoca fra questi integrandi e gli ordini mancanti delle funzioni aventi quell'unico polo. Ed ancora seguendo il Weierstrass (1), la doppia integrazione di un differenziale di seconda specie che ammette lo scambio della variabile e del parametro (polo mobile) rispetto all'uno e all'altro, e lungo due linee, chiuse provvede una relazione bilineare fra i periodi degli integrali fondamentali di 1.ª e di 2.ª specie lungo le due linee, (donde deriva la forma di Weierstrass delle relazioni fra periodi); la qual relazione è il punto di partenza per definire i tagli canonici sulla superficie di Riemann e distinguere i sistemi di tagli che spezzano la superficie, indipendentemente dalle nozioni della connessione.

Il volume si chiude con un cenno alle funzioni prime del Weierstrass e col teorema di Abel (al quale conduce il problema di determinare una funzione del corpo come prodotto di funzioni prime); con uno sguardo storico e un indice alfabetico.

L'ampiezza e la varietà delle vedute, la novità della trattazione dànno a questo libro un vivo interesse. Solo qua e là io oserei desiderare maggior densità e maggior efficacia: ed anche la divisione in lezioni, con lunghi sommari (solo nell'indice è indicata una divisione in capitoli) non pare la più adatta a raccogliere l'attenzione del lettore.

Nè totalmente opportuni sono la forma e il posto che si vuol dare ai metodi del Weierstrass; chè, se il rigore e la purezza del metodo fanno desiderare di eliminare o ridurre le considerazioni proprie all'analysis situs, l'uso di funzioni del Weierstrass con unico polo

---

sarebbe analoga. Recentemente per via geometrica e colle stesse restrizioni del Noether e del Picard fu trattato questo caso dal Severi (Rendiconti del Circolo mat. di Palermo 1903).

(1) Solo contemporaneamente alla pubblicazione del presente volume hanno veduta la luce le lezioni del Weierstrass sulle funzioni abeliane (Werke IV Bd.) onde gli autori hanno dovuto ricostruire questa parte sulle notizie sommarie che si avevano delle sue lezioni orali (Cfr. p. 645).

Digitized by Google

non rappresenta in ciò elemento essenziale e diminuisce quindi l'efficacia. Ma il ricorso della teoria riemanniana all'analysis situs è realmente essenziale? Certo proprio di questa è il discorso; ma ugualmente sarebbe a dire in ogni teoria d'integrazione lungo linee qualsiansi, anche nella presente degli autori; onde il Weierstrass limita sempre i suoi contorni a forme poligonali. Ma superata questa obbiezione, si elimina quasi da sè ogni difficoltà a ricondurre nel campo algebrico le poche nozioni sulla connessione cui ricorrono gli A. medesimi nell'esposizione della teoria del Riemann. E la distribuzione dei circuiti sulla superficie di Riemann, le loro intersezioni, sono d'altronde fatti algebrici, indipendenti anche dalla nozione d'integrale (1).

BEPPO LEVI.

J. W. MELLOR. *Higher mathematics for students of Chemistry and Physics. With special reference to practical work.* London; Longmans, Green and Co. 1902. 8.° pag. XXI + 543 [Prezzo del vol. leg. 12 sh. 6 d.].

L'opportunità che i naturalisti e la necessità che i chimici conoscano i fondamenti, almeno, delle parti superiori delle matematiche vennero in Italia constate ufficialmente da una legge che entra attualmente in vigore. Che esse corrispondano ad un'opinione, la quale si fa strada in tutto il mondo, è attestata da una serie di pubblicazioni speciali, di alcune delle quali il *Bollettino* nostro si è già occupato; tali sono quella del Nernst e Schönflies (2), che di recente raggiunse una terza edizione (3), e quella del Vivanti (4); altri congeneri, di cui nessun nostro collaboratore tenne finora parola, sono un libro di H. Vogt (5) ed uno di H. A. Lorentz, al quale una traduzione dall'olandese in tedesco ha assicurato più larga diffusione (6). Ora, a questi tentativi fatti dalla Germania, dalla Francia, dall'Italia e dall'Olanda, se ne aggiunge uno proveniente dall'Inghilterra e del quale vogliamo oggi occuparci. Ne è autore, non già un matematico, erudito anche nelle dottrine chimiche, ma un distinto cultore della fisico-chimica, il

(1) E sotto tale aspetto si leggono infatti nel Traité d'Analyse del Picard (T. II), quantunque nella forma del discorso restino anche qui le parole proprie all'analysis situs, e particolarmente a quella delle superficie uniconnesse.

(2) *Bollettino*, T. I, 1898, p. 48-51, e T. II, 1899, p. 101.

(3) NERNST UND SCHÖNFLIES, *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften*, 3 ª Aufl. (München und Berlin, Oldenbourg, 1902),

(4) *Bollettino*, T. VI, 1903, p.

(5) *Éléments de mathématiques supérieures à l'usage des physiciens, des chimistes et ingenieurs et des eleves des facultés des sciences* (Paris, Nony, 1901).

(6) *Lehrbuch der Differential-und Integralrechnung und der Anfangsgründe der Geometrie* (Leipzig, Barth, 1901).

Digitized by Google

quale espone tutto quello che di matematica dovette apprendere per potere coltivare quell' importante ramo della filosofia naturale. Nessuna meraviglia quindi se, secondo lui, « la matematica superiore è l' arte di ragionare sopra le relazioni numeriche esistenti tra fenomeni naturali, e le varie parti di essa rappresentano altrettanti modi di considerare siffatte relazioni ».

Tutta l' opera del Mellor comprende tredici capitoli distribuiti in tre sezioni: una *elementare*, una *superiore* ed una contenente un *compendio di alcuni utili risultati dell' algebra e della trigonometria.*

Cinque capitoli compongono la I sezione e trattano risp.: Calcolo differenziale, Geometria analitica, Funzioni con proprietà singolari, Serie infinite e loro uso. Caratteristiche dell' esposizione sono a straordinaria ricchezza nelle applicazioni e gli esempi attinti dalle scienze naturali e l' uso costante di considerazioni chimiche per illustrare, quasi per giustificare, certe definizioni totalmente astratte. [Ad es. per giungere al concetto di *derivata*, l' A. parte dalla reazione mediante cui l' acido cloridrico nasce dalla combinazione dell' idrogeno col cloro e considera (pag. 4) la velocità con cui essa avviene; e per stabilire quello di *integrale* prende le mosse dalla reazione chimica che nasce aggiungendo una molecola d'acqua ad una di zucchero (p. 150)]. Con criteri analoghi sono scritti i tre capitoli raccolti nella II Sez. ed aventi i titoli seguenti: Funzioni iperboliche, Metodi per integrare le equazioni differenziali, Teorema di Fourier.

L' ultima sezione comprende i cinque Capitoli seguenti: Risoluzione delle equazioni numeriche, Determinanti, Probabilità e teoria degli errori, Collezione di formole e Tavole numeriche.

Ci è impossibile addentrarci in una descrizione minuta e completa di tutto quanto il Mellor espone; se lo facessimo il lettore si meraviglierebbe (come si meravigliò chi scrive queste linee) di quante importanti questioni chimiche esigano l' uso del calcolo infinitesimale e della geometria analitiea, e di quanto estese nozioni matematiche siano oggi richieste da uno seguace di Lavoisier. Nè intendiamo addentrarci in una discussione sull' ordinamento della materia, il quale è diverso da quello di consueto adottato; su di esso potrà giudicare soltanto chi avrà preso l' opera del Mellor come base di un corso di lezioni. A noi bastò di segnalare agli italiani, studiosi di un argomento attualmente di moda, un' opera che si raccomanda alla loro attenzione, sia per la ricchezza di illustrazioni extramatematiche, sia perchè, essendo scritta da un naturalista, fa conoscere da un nuovo punto di vista, l' insegnamento della matematica pei chimici.

G. L.

Digitized by Google

E. STUDY. — *Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung der Kräfte und verwandte Gegenstände der Geometrie.* — Leipzig, Teubner, 1901-03; pp. XIII-603. [Prezzo Mk. 21].

Col titolo messo in testa al suo libro il sig. Study fa comprendere com' egli intenda rivolgersi di preferenza al geometra che allo studioso di meccanica. E se anche l' intenzione dell' A. non riuscisse da ciò manifesta, non rimarrebbe che sfogliare, anche solo rapidamente, il libro, per convincersi che questo è un compendio e nello stesso tempo un ampio complemento di ricerche, di carattere essenzialmente geometrico, proseguite da varii anni dall' A. in un duplice indirizzo: studiare, cioè, da un lato se la geometria del moto istantaneo d' un corpo rigido o, che fa lo stesso, la geometria dei sistemi di forze applicate ad un tale corpo (dinami) si possa svolgere in modo diverso e, per certi riguardi, più semplice di quello con cui si studiò finora, ove si pose a base la rappresentazione e la composizione dei movimenti e delle forze che tutti sanno, — e, dall' altro lato, valersi delle relazioni che intercedono fra la geometria delle dinami e la teoria dei complessi di rette, nonchè utilizzare le nuove rappresentazioni delle dinami e le nuove regole per la loro composizione, onde sviluppare, parallelamente ed in analogia, tutta una nuova geometria della retta.

Il primo dei due indirizzi di ricerca informa la prima e la seconda parte della « Geometrie der Dynamen », condotte rispettivamente con metodo geometrico e analitico; mentre al secondo indirizzo è ispirata la terza ed ultima parte, dove la geometria dei movimenti o delle dinami ritorna solo verso la fine a guisa di applicazione o di appendice.

Noterò subito una particolarità che salta immediatamente all' occhio: la grande abbondanza di termini e di locuzioni nuove, che a primo aspetto indispone e confonde; tanto più che spesso due figure, designate con due nomi diversi, hanno fra loro grandissima analogia, anzi talora coincidono addirittura in generale, non distinguendosi che nei casi limiti. Lo Study per il primo riconosce quest' inconveniente, e dichiara di essersi limitato, nell' introdurre nuove denominazioni, al puro necessario: in realtà non si può negare che ai nuovi termini corrispondano sempre enti di importanza fondamentale per la teoria; e allora val bene la pena di superare la prima difficoltà e farci l'abitudine.

* * *

Nella prima parte l' A. si occupa sostanzialmente di rappresentare una diname altrimenti che coll' ordinario sistema di un *segmento* (1)

(1) Con *segmento* intenderò sempre di indicare la *linea* (forma di 2.ª specie) del Calcolo geometrico; il segmento non si può adunque, a differenza del vettore, trasportare da una retta su un' altra parallela.

Digitized by Google

e di un *vettore*, e di dedurre le relative regole di composizione. Accanto a questo tema principale, si svolge poi uno studio delle proprietà degli enti che s' incontrano per via, delle relazioni fra di loro e colla geometria del movimento dei sistemi invariabili. Il metodo impiegato è puramente geometrico, e in generale elementare, tale cioè da non richiedere cognizioni matematiche di natura elevata. Le nuove soluzioni che dà il sig. Study per il problema della rappresentazione delle dinami e della loro composizione sono tre, e in ciascuna di esse la figura rappresentativa della diname è un sistema di due rette. Esaminiamo brevemente queste tre soluzioni.

Dapprima vien definita una figura che è, in certo modo, duale del *segmento*, e che può, nella geometria delle dinami (o dei movimenti), sostituirlo; questa figura si chiama *Keil*, ed è l' insieme di due piani φ, φ' *non* ortogonali, presi in un determinato ordine. *Apertura* del Keil è la tg (φ, φ'). Il Keil si dirà proprio od improprio secondochè la retta (φ, φ') è propria od impropria; quando questa retta è propria si chiamerà senz' altro la *retta* del Keil: su di essa è fissato un senso positivo. Si *associano* fra loro un segmento ed un Keil proprio aventi la medesima retta, quando la lunghezza del segmento è uguale all' apertura del Keil. Ricorrendo ai segmenti associati potremo definire la somma di due Keile le cui rette s' incontrano; la costruzione geometrica corrispondente si può tuttavia eseguire senza passare attraverso ai segmenti, ed è l' analoga della costruzione col parallelogrammo dei segmenti; questo vien sostituito da una figura solida: il *Keiltrapez*. Però una tale costruzione si potrà applicare solo a Keile di apertura non nulla le cui rette si tagliano in un punto proprio. Il passaggio agli altri casi è ovvio; basterà pensare ai segmenti associati ai Keile proprii, e convenire di associare ad un Keil improprio un vettore: il vettore AA' perpendicolare ai piani φ, φ' del Keil ed i cui estremi A ed A' sono rispettivamente nei piani φ e φ'. Altrimenti si può anche dire che ad un Keil improprio si associa non un segmento, ma una coppia di segmenti. Una volta constatato che quell' operazione sui Keile, definita come addizione, gode in ogni caso delle proprietà associativa, commutativa, distributiva, si potrà parlare di *somma formale* di due o più Keile colle rette disposte comunque; si arriva così alla riduzione di un sistema di Keile ad una forma che si può chiamare *normale*, analoga a quella cui dà luogo la riduzione di più segmenti non aventi la stessa origine. Si ha cioè: la somma geometrica di un numero qualunque (finito) di Keile si può sempre, ed in infiniti modi, ridurre ad un Keil proprio e ad uno improprio; in particolare può mancare l'uno o l'altro dei due Keile od anche posson mancare tutti e due. Quando poi i due Keile esistono entrambi, si può sempre, ed in un solo modo, fare sì che il Keil improprio abbia i suoi piani perpendicolari alla retta del Keil proprio.

Digitized by Google

Dopo ciò si capisce che alla rappresentazione d'una diname mediante un segmento ed un vettore se ne possa sostituire un'altra con due Keile, uno proprio ed uno improprio. Ma non è questa ancora la rappresentazione a cui si vuole arrivare. Viene introdotto un nuovo ente, il *motore*, che è l'insieme di due rette X e Y *non* ortogonali prese in un determinato ordine. Il motore si riduce ad un *rotore* quando le rette s'incontrano (al finito), oppure ad un *traslatore* quando sono parallele. Si chiama *apertura* del motore la tg (X, Y), *lunghezza* del motore la minima distanza di X e Y, *asse principale* la perpendicolare comune alle due rette (od una qualunque di queste perpendicolari nel caso del traslatore). Ad una somma di Keile qualunque si potrà sempre *associare* un motore; basta ridurre la somma di Keile a forma normale: $K' + K''$ (con K' intendiamo il Keil proprio); il motore associato sarà allora quello che ha per asse la retta di K', per lunghezza la distanza fra i due piani paralleli di K'', e per apertura l'apertura di K'. Non occorre altro per comprendere come il motore, questa figura costituita di due rette, valga a rappresentare una diname in luogo del sistema di un segmento e di un vettore, oppure di un Keil proprio ed uno improprio.

I motori hanno una loro geometria: due motori $(O X)$, $(O Y)$ colla stessa retta O d'origine si possono comporre in un unico motore $(O Z)$, e ciò secondo due diverse costruzioni che sono, per così dire, duali una dell'altra: la prima fondata sulla costruzione del parallelogrammo dei segmenti, l'altra su quella del Keiltrapez. Alla composizione di due tali motori corrisponde la composizione dei Keile associati, e quindi di due dinami. Si comprende poi che in luogo di una diname possiamo considerare un sistema di movimenti istantanei elementari (traslazioni e rotazioni), e occuparci della loro sovrapposizione. Il movimento risultante (un movimento a vite) si potrà rappresentare o col sistema di un segmento e di un vettore, o con una somma di Keile ridotta a forma normale, o infine con un motore. Si comporranno più movimenti a vite sommando i corrispondenti motori, che si potranno sempre supporre colla retta d'origine comune.

Il secondo modo di rappresentare la diname mediante due rette si ottiene introducendo un'altra figura ausiliaria, che tiene il posto del Keil della rappresentazione precedente; quest'altra figura è il *Quirl*, cioè l'insieme di un punto e di un piano che non s'appartengono, presi in un dato ordine. Il Quirl si dice proprio, se il punto ed il piano sono entrambi proprii; improprio, se tale è uno dei suoi elementi. *Retta* di un Quirl proprio è la perpendicolare condotta dal punto sul piano, sua *lunghezza* la distanza del punto dal piano. Al Quirl si *associa* un segmento, la cui retta coincide colla retta del Quirl, e la cui lunghezza è la *reciproca* della lunghezza di questo. Naturalmente

Digitized by Google

ad un Quirl risulta associato anche un Keil. Si può definire ed eseguire la somma di due Quirle aventi il medesimo punto ricorrendo ai segmenti associati; ma anche qui vi è una costruzione che permette la composizione dei Quirle senza ricorrere ai segmenti. La costruzione è di natura elementare e si semplifica quando i Quirle componenti hanno posizioni speciali, ovvero quando sono improprii; in quest'ultimo caso al Quirl andrà associato un vettore, e non più un segmento. Infine si giunge alla somma formale di un sistema qualunque di Quirle, che sarà riducibile ad una forma *normale*, cioè al sistema di un Quirl proprio e di uno improprio, i cui piani siano paralleli. Questo sistema di Quirle si potrà assumere come rappresentante di una diname. Accanto al Quirl porremo allora una figura, che si compone di due rette, e si comporta rispetto ad una somma di Quirle come il motore rispetto ad una somma di Keile. Essa si chiama *impulsore*, ed è il sistema di due rette, prese in un certo ordine, che *non* stanno in un medesimo piano; si dirà poi più particolarmente *torsore* quando le due rette sono ortogonali, *eiettore* quando una delle due è impropria. Si vede che l'impulsore non è proprio la stessa cosa del motore. Senza entrare in altri particolari, poichè vi è stretta analogia colla rappresentazione precedente, dirò soltanto che ad una somma di Quirle viene associato un impulsore, il quale risulta ben definito quando il Quirl sia ridotto a forma normale. Due impulsori con una retta comune ammettono una composizione geometrica, alla quale sta a base una costruzione col *Quirltrapez* (una figura analoga al parallelogrammo dei segmenti e al Keiltrapez), e che rappresenta una composizione di dinami ovvero di movimenti istantanei di un sistema rigido.

Delle tre rappresentazioni, che il sig. Study propone per la diname, l'ultima coincide colla prima di cui abbiamo parlato, in quanto in essa si prende ancora per figura rappresentativa il motore; ma se ne discosta per il modo di addizionare due motori aventi in comune la retta origine. La nuova composizione dei motori si chiamerà *stereometrica*, per distinguerla da quella precedente, che vien detta *geometrica*; essa possiede ancora tutte le proprietà della somma. Tanto per dare un'idea dei metodi costruttivi dell'A., descriveremo la somma stereometrica di due motori, che si può esporre in breve. Se indichiamo con $\overline{OX}$ la perpendicolare comune alle rette del motore (OX), e se (OY) è un altro motore avente in comune con (OX) la prima retta O, si dice somma stereometrica dei due dati quel motore (OZ) la cui seconda retta Z è definita dal seguente schema:

$$\begin{aligned} X_1 &= \overline{OX} \quad , & Y_1 &= \overline{OY} \quad , \\ X_2 &= \overline{OX_1} \quad , & Y_2 &= \overline{OY_1} \quad , \\ X_3 &= \overline{X_2Y} \quad , & Y_3 &= \overline{Y_2X} \quad , \\ & Z = \overline{X_3Y_3} \quad . \end{aligned}$$

Digitized by Google

Non è mio proposito di dare un giudizio sulla maggiore o minore semplicità assoluta di questa e delle altre costruzioni che fanno parte dei metodi del sig. Study. Dirò che quella ora descritta schematicamente è un po' meno semplice che le due precedenti relative all'addizione geometrica dei motori e degli impulsori; d'altra parte si semplifica, ed anche notevolmente, quando i due motori sommandi siano in posizioni speciali o si riducano a rotori o a traslatori. Certo, i metodi dello Study hanno il vantaggio teorico che permettono di sommare due dinami come si comporrebbero due vettori. Quanto ai vantaggi pratici, quantunque si possa a priori asserire che difficilmente contribuisce ad aiutare l'intuizione una figura dove, in luogo di punti e di segmenti, compaiono piani e rette variamente intrecciantisi, pure non sarebbe inutile sottoporre le costruzioni dell'A., per ciò che riguarda la composizione delle dinami, alla prova della loro esecuzione effettiva: i metodi della geometria descrittiva porgerebbero il mezzo migliore per questa prova.

I tre diversi modi di rappresentare e di comporre le dinami offrono materia, come dissi sul principio, a notevoli sviluppi geometrici, i quali, anzichè comparire come accessorii, sono parte integrante della trattazione. Accennerò alle corrispondenze spaziali che nascono dalla considerazione di quelle tre rappresentazioni, e che si riducono poi a movimenti (finiti); inoltre ad ognuna delle tre composizioni di dinami corrisponde una particolare sovrapposizione di movimenti. Anzi è appunto ricorrendo alle due prime sovrapposizioni che l'A. riesce alla composizione geometrica dei motori ed a quella degli impulsori, considerando sia la relazione fra una coppia x, x' di punti corrispondenti nel movimento e il loro punto medio y, sia la relazione fra la stessa coppia di punti e il piano perpendicolare alla loro retta in y. Si ottengono in tal modo dei legami fra la geometria delle dinami ed i movimenti finiti, che sono una estensione della nota relazione fra le dinami ed i movimenti infinitesimi. Quanto poi alle sovrapposizioni dei movimenti, quelle che corrispondono all'addizione geometrica e stereometrica dei motori danno luogo, nel caso di movimenti infinitesimi, con un passaggio al limite, all'ordinaria composizione col parallelogrammo dei segmenti.

Una cosa che va rilevata è la parte che ha in queste ricerche la geometria non euclidea. L'A. non volle, per conservare alla sua esposizione un carattere possibilmente elementare, fare uso esplicitamente di considerazioni uscenti dal campo della geometria d'Euclide; però fa notare come lo spirito di questa geometria gli abbia servito continuamente di guida. Se difatti, com'egli osserva, si tenta di estendere agli spazi non euclidei le costruzioni da lui esposte, si trova un sistema costruttivo unico: il che spiega sia le analogie formali, sia le divergenze fra le tre classi di costruzioni a cui si giunge quando si passa allo spazio ordinario. E. Daniele (*continua*).

Digitized by Google

G. HOLZMÜLLER. *Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Dritter Teil: Lehr - und Uebungsstoff zur freien Auswahl für die Oberklassen realistischer Vollanstalten und höheren Fachschulen, nebst Vorbereitigungen auf die Hochschulmathematik.* II. Aufl. Mit 223 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, G. B. Teubner. 1902. 8.° p. XIV + 370 [Prezzo del vol. leg. Mk. 4. 40]

Il lungo titolo di questa opera del ben noto professore di Hagen contiene alcune frasi che, probabilmente, riusciranno un po' oscure a molti dei nostri lettori. A chiarirne il significato diremo che, secondo le disposizioni di legge, che andarono in vigore in Germania a partire dal 1901, per le scuole tecniche superiori, al professore di matematiche venne concessa una grande libertà nella scelta degli argomenti da svolgere. Ad esempio venne lasciato in suo arbitrio o di approfondire l'insegnamento dell'algebra, spingendolo fino a raggiungere la risoluzione delle equazioni algebriche o delle equazioni numeriche trascendenti, oppure di spaziare nel campo della geometria analitica, sintetica o descrittiva. In tal modo venne reso possibile al docente di dare al proprio insegnamento un'impronta personale e a certi istituti di conservare la fisonomia speciale da essi posseduta. A nessuno dei nostri lettori sfuggirà la strardinaria importanza che possiede siffatta radicale innovazione, e molti converanno con noi che essa potrebbe essere trapiantata in Italia, almeno per quanto concerne il 2.° biennio degli Istituti tecnici, il cui programma potrebbe essere composto da ciascun insegnante, scegliendone gli ingredienti fra un certo uumero di temi, di cui il legislatore darebbe l'enumerazione. È chiaro che un libro di testo, informato all'indicato criterio didattico, dev'essere scritto in modo *sui generis;* cioè non presentarsi come una catena di verità saldamente connesse le une alle altre, ma piuttosto come un florilegio di teorie differenti, poste a disposizione più dell'insegnante che dello studente. Tale si presenta appunto il volume che ora annunciamo; ciò è evidente dalla semplice ispezione dell'indice che ne presentiamo:

Parte I. *Geometria.*

I. Esercizi sulla teoria dei circoli e sui quadrangoli e quadrilateri completi. II. Costruzione lineare delle coniche. III. Prospettiva, problemi di chiusura, costruzioni con la sola retta, ecc. IV. Punteggiate proiettive. V. Fasci proiettivi. VI. Il rapporto anarmonico. VII. Esempi di fasci proiettivi e punteggiate proiettive. VIII. Proprietà metriche delle coniche. IX. Cerchio di curvatura delle coniche. X. Aree delle coniche; rettificazione della parabola. XI. Punteggiate involutorie. XII. Fascio di raggi involutori. XIII. Esercizi di geometria analitica. XIV. Applicazione delle coniche alla fisica matematica.

Digitized by Google

Parte II. *Stereometria.*

I. Preliminari sopra i momenti d'inerzia. II. Tronchi di prismi e cilindri; solidi di risoluzione. III. Quadriche. IV. Applicazioni del teorema di Cavalieri. V. Misura di alcune volte. VI. Fondamenti dell'assonometria ortogonale. VII. Projezione di una sfera. VIII. Problemi varii.

Parte III. *Trigonometria sferica.*

I. Preliminari. II. Triangoli sferici rettangoli. III. Triangoli sferici obliquangoli. IV. Calcoli numerici. V. Costruzione di triangoli sferici. VI. Conseguenze del « teorema del coseno ». VII. Circoli più importanti di un triangolo sferico. VIII. Risoluzione numerica di triangoli sferici. IX. Esercizi. X. Cenno sopra la reciprocità sferica.

Parte IV. *Analisi algebrica con applicazioni alla geometria ed alla meccanica.*

I. Le funzioni intere razionali. II. Generalità sulle serie infinite. III. Teorema del binomio. IV. Applicazioni alle funzioni algebriche. V. Sviluppo in serie di alcune funzioni trascendenti.

Parte V. *Equazioni di grado superiore.*

I. Equazioni di 3.° grado. II. Equazioni di 4.° grado. III. Cenni sulle equazioni di grado n.

Benchè il nostro ordinamento scolastico sia informato a concetti ben differenti da quell' « akademische Freiheit », che in Germania accenna ad diffondersi dalle Università alle Scuole secondarie, pure un libro qual è quello dell' Holzmüller potrà essere consultato con profitto dai professori italiani, molti dei quali sono animati dalla nobile aspirazione di estendere la propria azione oltre gli angusti limiti imposti dai rigidi programmi ufficiali

G. L.

NOTIZIE

ANTONIO ARNAUD, IL GRANDE ARNAUD, COME MATEMATICO: ecco il titolo di un' interessante memoria, inserita nel XIV Fascicolo delle *Abhandl. zur Gesch. der Math.* (1). L'autore di essa (Karl Bopp) si è proposto, ed è riuscito, a mostrare come al suo eroe spettasse nella storia delle scienze esatte un posto non meno importante di quello che da tempo egli occupa nella storia della filosofia.

(1) Lo stesso fascicolo contiene molti complementi al lavoro dello Suter sopra *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (Abh. zur Gesch. der Math. X, 1890) e un importante scritto del Björnbo sopra Menelao.

Digitized by Google

Arnaud nacque a Parigi il 6 Febbraio 1612 e morì a Bruxelles l'8 Agosto 1694; è nota la parte che egli ebbe nelle dispute filosofico-religiose, il cui più celebre risultato è la collezione di *Lettres provinciales* di Pascal; il Bopp vi accenna, dilungandosi poi sulle relazioni che l'Arnaud ebbe con questo, con Descartes e con Leibniz. La produzione matematica dell'Arnaud comincia con alcune tesi di logica sostenute dinanzi alla Sorbona il 25 Luglio 1641, e si svolge in alcune pagine di *La Logique ou l'Art de penser*. Ma il suo elemento precipuo è formato dagli anonimi *Nouveaux Elémenls de Géométrie*, pubblicati per la prima volta nel 1667 e ristampati poi nel 1683, nel 1680 e nel 1711. Giudicati assai favorevolmente dai contemporanei, essi servirono di base alla diffusissima opera analoga del P. Lamy; inoltre vennero nel 1696 dal Malezieux scelti per educare al sano geometrizzare il Duca di Borgogna, onde si trovano in sostanza riprodotti negli *Eléments de géometrie pour Monseigneur le Duc de Bourgogne*; finalmente gli *Eléments de Mathématiques de Monsieur Varignon* ebbero origine dal desiderio di completare l'opera dell'Arnaud, col trattare la stereometria in base al metodo da lui proposto por la planimetria. Riguardo alla natura di tale metodo noteremo soltanto che esso conferma l' attitudine di opposizione ad Euclide che la Francia manifestò con Ramus e Legendre; riguardo ai particolari noteremo i cenni del « metodo degli indivisibili » e la scoperta fatta dall'Arnaud, indipendentemente da Maurolico e Pascal, del procedimento logico noto sotto il nome di « induzione completa ». Le qualità d' inventore dell'Arnaud sono poi attestate dalla sua *Solution d'un des plus celèbres et des plus difficiles problèmes d'arithmétique, appelé communement les quarrez magiques*. Se tutto ciò basti a far ritenere meritevole l'Arnaud del nome di « Euclide del Secolo XVII », proposto dal Bopp, lasciamo giudice il lettore.

***

TEMA PROPOSTO PEL 1906 DALL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI BERLINO. — Non essendo stato risoluto in alcun modo il problema proposto pel 1902 (v. *Bollettino*, T. III, 1900, p. 126), esso viene nuovamente suggerito sotto la seguente forma più semplice e generale: « L'Accademia desidera che venga arrecato qualche perfezionamento notevole alla teoria delle funzioni a più variabili che ammettono trasformazioni lineari in sè stesse ». Premio 5000 Marchi.

***

UN PROGETTO BIBLIOGRAFICO. — La Società Bibliografica Italiana nell' intendimento di rendere sempre più cordiali e saldi i vincoli fra i raccoglitori italiani ed anche allo scopo di far nota agli studiosi l' esistenza di molte raccolte che possono offrire prezioso materiale di

Digitized by Google

studio, ha deliberato di pubblicare una *Guida delle biblioteche e raccolte bibliografiche private italiane*, affidandone la compilazione al Prof. G. Fumagalli e al Dott. A. Bertarelli. In questa *Guida* saranno indicati tutti coloro, Italiani o Stranieri residenti in Italia, i quali si occupano di riunire: I. Libri opuscoli o fogli volanti, II. Stampe, III. Autografi, IV. Archivi. Vennero invece escluse tutte le Biblioteche, Musei e Archivi appartenenti ad istituti, ad opere pie, ad associazioni o ad altri enti, le biblioteche circolanti ed i gabinetti di lettura anche se di proprietà privata. La società — la quale, come è noto, ha per sede la Biblioteca Braidense di Milano — si rivolge a tutti gli studiosi per avere notizie in proposito.

* * *

PROGETTO D' UN' EDIZIONE INTERNAZIONALE DELLE OPERE DI LEIBNIZ. Una delle proposte presentate alla prima assemblea generale dell' Associazione internazionale delle Accademie, tenuta il 16 Aprile 1901, fu la pubblicazione di un' edizione completa delle opere di Leibniz. Tale proposta incontrò il plauso generale e venne all' unanimità votato il seguente ordine del giorno.

« In vista di una pubblicazione progettata delle opere di Leibniz, la cui esecuzione sarà sottoposta alla prossima sessione dell' Associazione delle Accademie, si confida all' Accademia delle Scienze morali e politiche, all' Accademia delle Scienze di Berlino ed all' Accademia delle Scienze di Parigi di delegare ciascuno un direttore. Questi direttori avranno per compito:

1.° Di fare appello a tutte le biblioteche e depositi pubblici e privati, chiedendo l' indicazione di tutti i documenti utili alla pubblicazione;

2.° Di redigerne un catalogo descrittivo o razionato;

3.° Di preparare un piano metodico da adottarsi per l' edizione progettata.

Dagli studi fatti da tale Commissione (composta di Diels, Poincaré, Bourtroux) risulta che solo ad Hannover esistono 60 mila manoscritti, di cui 35 mila sono lettere. Per redigere il desiderato catalogo la Commissione stessa si è rivolta a tutti i capi delle biblioteche ed archivi e ha fatto una prima classificazione del materiale ad essa noto; il risultato di tale lavoro verrà sottoposto nel 1904 all' assemblea generale dell' Associazione.

I voti di tutti gli studiosi, plaudendo all' impresa deliberata, accompagnano i benemeriti che si occupano di eseguirla.

* * *

ACCADEMIA REALE DEL BELGIO. — Per l' anno venturo quest' Accademia pose a concorso il tema seguente: *Recare qualche contributo*

Digitized by Google

allo studio algebrico e geometrico delle forme n-*lineari, per* $n > 3$. Premio 600 fr.; scadenza 1.° Agosto 1904; i lavori dei concorrenti devono essere scritti in francese od in fiammingo e inviati anonimi al Segretario perpetuo di quella Società.

La stessa Accademia è poi chiamata a conferire il Premio quadriennale C. Lagrange di 1200 fr. all'autore del migliore lavoro matematico sperimentale apportatore di qualche reale progresso alla conoscenza matematica della figura della terra. I lavori dei concorrenti devono essere presentati, stampati o manoscritti, avanti il 1.° Gennajo 1905; quelli stampati devono portare una data posteriore al 31 Dicembre 1894.

* * *

F. Schweins e O. Hesse. — È noto che l'analisi combinatoria ha acquistato posto stabile ed importante nella matematica a partire da Leibniz, la cui dissertazione di laurea tratta appunto *De arte combinatoria*. Circa un secolo dopo C. F. Hindeburg seguiva le orme del suo grande compatriota, ma, esagerando il valore di quella teoria, fondava la famigerata sterile « Scuola combinatoria ». Ad opporsi alle tendenze da essa sostenute si adoperò un celebre professore di Gottinga, B. F. Thibaut, contemporaneamente a cui insegnava, come libero docente, F. F. Schweins. Questi, chiamato poi ad Heidelberg vi insegnò per 93 semestri ed ebbe come discepolo, fra gli altri, J. Steiner. Suo successore fu O. Hesse, il quale in quell'Università insegnò dal semestre invernale 1857 sino al 1884; a lui succedettero il Königsberger, il Fuchs e poi nuovamente il Königsberger. Di tutti questi uomini che, in Heidelberg vissero ed operarono, tratta un'ottima memoria di M. Cantor inserita nel II vol. (Heidelberg, 1903) della « Festschrift » *Heidelberger Professoren aus dem neunzehnten Jahrhundert.*

* * *

Influenza della tecnica sopra lo sviluppo della meccanica teorica, ecco il tema della bella prolusione al corso di meccanica razionale nel Politecnico di Karlsruhe tenuto dal Prof. F. Heun il 2 Dicembre 1902; chi desidera conoscerlo lo troverà inserita nel XII vol. (1903) del *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung.*

* * *

Temi di concorso. — La sezione scientifica del Politecnico di Charlottenburg ha posto a concorso (con scadenza il 1.° Maggio 1904) il tema seguente: *Runge ed Heun hanno insegnati metodi generali pel calcolo numerico di qualsia soluzione di un'assegnata equazione*

Digitized by Google

differenziale. Applicandoli s' integrino numericamente alcune speciali equazioni differenziali, di cui si conoscano già le soluzioni analitiche, e servendosi di queste si determini il grado di esattezza delle anzidette soluzioni numeriche.

Per l' anno 1906 la Società Jablonowski ha assegnato un premio di 1000 Mk. al risolutore della seguente questione: *Ricerca di numeri analoghi ai numeri di Bernoulli, specialmente nel campo delle funzioni ellittiche, i quali ammettano moltiplicazione complessa.* I lavori dei concorrenti devono essere presentati anonimi prima del 30 Novembre 1906 ed essere scritti in tedesco, francese o latino.

La Facoltà filosofica dell' Università di Rostock ha proposto per l'anno 1903-04 il seguente problema: *Determinare in modo esauriente tutte le posizioni scambievoli di due coniche concentriche* (cfr. Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie,* I, p. 141) *e quelle di due quadriche pure concentriche.*

***

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE.

A. FAVARO - *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei.* VII. *Giovanni Ciampoli.* (Atti del R. Istituto Veneto, T. XLII, 1902-1903); VIII. *Giovanni Sagredo.* (Nuovo Archivio Veneto, T. IV, Parte II, 1903).

A. FAVARO - *Per la storia dei manoscritti galileiani concernenti i pianeti medicei.* (Atti del R. Istituto Veneto, T. XLII, 1902-1903).

F. ENGEL - *S. Lie.* Traduzione di Ugo Amaldi. (Giornale di Matematiche, T. XL, 1902).

***

NOMOGRAFIA. — Ai lettori che s'interessano a questo nuovo verso della matematica applicata, del quale già due volte il *Bollettino* si è occupato (v. T. II, 1899, p. 126-127 e T. III, 1900, p. 117), segnaliamo l'*Exposé synthétique des principes fondamentaux de la nomographie* di M. d'Ocagne, inserito nell' 8.° Cah. della 2.ª Serie del *Journal de l'Ecole polytechnique* e pubblicato anche a parte dal Gauthier-Villars. Fra i nuovi risultati ivi stabiliti va rilevata la classificazione di tutti i nomogrammi in venti tipi, uno ad un piano e gli altri a due, tutti gli altri potendo ottenersi mediante opportune combinazioni di quelli.

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1903.

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

Abel 30, 63, 82, 83, 84, 115.
Abraham 62.
d'Adhémar 65.
Agnesi 7, 38.
Ahrens 61.
Alasia 29, 82.
Amaldi U. 13, 71-79, 128.
de Amicis 75 *n.*
Amodeo 22, 27, 95, 96 *n.*
Andrew 28.
Apollonio 6.
Archimede 1, 2, 4, 10, 16,
Aristotele 103.
Autonne 22.
Auzout 4.

Bachmann 70, 71.
Baleo 100.
Baltzer 25.
Barbarin 7.
Bardey 8, 56.
Barduzzi 93.
Bassani 78 *n.*
Bayes 86, 87.
Beltrami, 13, 14, 24, 97.
Benedetti 36 *n*
Bernoulli Daniele 88.
Bernoulli Giac. 8, 86, 87, 90.
Bertarelli 126.
Bertrand 44, 65, 87.
Bessel 88.
Betti 23.
Bjerkness 83.
Björnbo 124.
Blanchard 93.
Blaserna 31.
Boccardi 23.
Bolyai 63, 92.
Bolzano 55.
Bonaini 98.
Bonatti 102.
Boncompagni 30.
Bonola 64.
Bopp 124, 125.
Bordin 62.
Borel 46, 65, 67, 90.
Borgogna (Duca di) 125.
Bortolotti 61, 64 *n.*
Bosmans 64.
Bourtroux 126.
Bragelogne 7.
Braunmühl 92.
Bretschneider 49.
Brill 31, 32.
Brioschi 13, 19, 23, 97.
Buffon 87.
Bunsen 70.
Buonamici 31.
Burckhardt 44, 61.
Burhenne 47.
Burmester 9.

Cahen 46.
Cantor G. 51.
Cantor M. 23, 54, 92, 96, 100, 101 *n*, 127.
Capelli 22.
Caporali 7.
Caraccioli 33, 38.
Caravelli 95.
Carcavy 4.
Carlo III (Borbone) 95.
Carlo Em. di Savoja 36.
Carlyle 38.
Cartesio (v. Descartes).
Casorati, 23.
Caspary 62, 63.
Cassini 8, 96.
Castel 2.
Castelli 92.
Castelnuovo 13.
Catalan 7, 47.
Cauchy 12, 65, 66, 67, 91, 51.
Cavalieri 1, 2, 4, 16.
Cayley 9, 72, 114.
Cebysceff (v. Tchebischef).
Cerruti 31.
Cesaro 7, 8, 44, 45, 46, 47.
Chasles 36, 42, 96,
Chini 59, 81.
Chrystal 29 *n.*
Chuquet 96.
Ciampoli 128.
Clebsch 7, 128.
Cornu 27.
Costadoni 98 *n.*
Cotes 10.
Cramer 7, 38.
Crelle 83.
Cremona 13, 14, 97.
Crofton 89.
Curtze 29, 30, 30 *n.*, 47.
Czuber 84, 89.

Damoiseau 62.
Daniele 122.
Darboux 24.
Darvai 92.
Dase 44.
Davis 44.
Debeaune 11.
Dedekind 58, 59, 73, 104, 110, 111 *n.*, 111, 112, 112 *n.*
Dehn 97.
Delanges 8.
Delaunay 11.
Delisle 64.
Desargues 6.
Descartes 6, 7, 8, 11, 34, 38, 55, 125.
Dirichlet (v. Lejeune-Dirichlet).
Dickson 22.

Digitized by Google

Diels 126.
Dingeldey 61.
Dinostrato 10, 11, 35.
Diocle 6, 351.
Domenico (Maestro) 102.
Drach 22.
Dupocq 21.
Durer 8.

Edoardo I.° 101.
Eneström 92.
Engel 88, 89, 128.
Enneper 24.
Enriques 71, 79.
Euclide 16, 30, 43, 49, 71, 78, 82, 100, 125.
Eulero 7, 10, 11, 26, 36, 38, 44, 52.

Fabroni 34 *n*, 38 *n*.
Fabry 90, 91.
Fagnano 6, 95, 38.
Favaro 31, 32, 128.
Faye 27.
Fechner 88.
Federico II
Ferdinando IV Borbone 95.
Fermat 4, 71.
Ferrussac 83.
Fibonacci Bartolomeo di Alberto 98.
Fibonacci Giovanni 98.
Fibonacci Guglielmo 98, 99.
Fibonacci Leonardo 98, 102.
Fichte 68.
Fontenelle 52.
Forbes 28.
Fouët 90, 92.
Fouret 10.
Fourier 117.
della Francesca 93.
Francœur 62.
Freeth 9.
Frescobaldi 96.
Fricke 14, 15.
Frizzo 69.
Fuchs 27, 127.
Fujisawa 22.
Fumagall 126.

Gaillot 62.
Galilei 10, 31, 32, 34, 93, 128.
Gallard 22.
Galluppi 56.
Gallucci 19, 20, 54, 56.
Galvani 53.
Gauss 24, 43, 44, 45, 46, 55, 71, 78.
Geiser 7, 14.
Geissler 49, 53.
Genocchi 45.
Giacosa 93, 93 *n*., 94.
G. L. (vedi Loria).
Glaisher 44, 45.
Gmeiner 59.
Godefroy 26.
Gram 4, 45.
Grandi 7, 9, 38, 95.
Grassi 18.
Grassmann H. 21, 55, 62, 63, 89, 90.
Grassmann H. der jüngere 89.
Grassmann J. 89.
Grassmann J. G. 90.
Grimaldi 99.
de Gua 34.
Günther 92, 93.
Guglielmini 99.
Guldin 16, 17.
Gutschoven 8.

Habenicht 10.
Hadamard 23, 43, 46, 67.
Halphen 7, 46.
Hamburger 27.
Hamilton 28, 63.
Hansen 47.
Hargrave 44, 45, 40.
Hartwig 62.
Hauck 27.
Haughton 9.
Helmholtz 55, 60, 70.
Hensel 27, 110, 116.
Hermite 45, 62.
Hesse 127.
Heun 127.
Hilbert 23, 94.
Hindeburg 127.
Hobbes 3.
Hoepli 13.
Holst 83.
Holzinger 54.
Holzmüller 15, 17, 123, 124.
de l'Hôpital 31, 96 *n*.
Huygens 4, 8, 64.

Ingrami 72, 73, 74, 75.
Ippia 10, 11

Jablonowski, 128.
Jacobi 84, 91.
Jahnke 3, 22, 62.
Janssen 27, 62.
Jensen 46.
Johnson 7.
Jordan 107.
Jsenkrahe 45.

Kant 19.
Kelland 28.
Kepler 6.
Kiepert 54.
Kirchhoff 70.
Klein 7, 11, 72, 102, 109.
Kneser 27.
Knoblauch 27.
Kronecker 22, 110.
Koch 22, 47.
Kochanski 30.
Königs 17 *n*.
Königsberger 68, 70, 126.
Kohn 42.
Kowalewski 23.
Kronecker 22, 110.
Kürschak 63.

La Gournerie 8, 9.
Lagrange 105.
Lagrange C. 127.
Lalande 62.
Lambo 96.
Lambert 100.
Lamé 9.
Lami 100.
Lampe 27, 92.
Lamy 125.
Landsberg 110, 116.
Lange 32.
Laurent 57.

Digitized by Google

Lavoisier 117.
Lazzarini 98.
Lazzeri 78 *n*.
Lebon 62, 92.
Legendre 43, 44, 45, 46, 83 *n*, 125
Leibnitz 21, 30, 32, 55, 125.
Lejeune-Dirichlet 14, 46.
Lemoine 62, 82 *n*., 108
Lembach 70.
Le Roux 62.
Le Roy 67.
Levi B. 116.
Levi-Civita 47.
Libri 100, 1000 *n*.
Lie 11, 128.
Lilienthal 62r
Lindemann 138.
Lissajous 10.
Lobatschewsky 78.
London 46.
Longchamps 7, 8.
Loria 13, 14, 17, 18, 19, 23, 25, 26, 27, 31, 33, 42, 48 *n*. 49, 54, 57, 58, 60, 61, 70, 80, 82, 83, 84, 93, 93 *n*., 110, 112, 124.
Lorenz 47, 116.
Love 62.
Lowett 23.
Ludwig 32.
Lüroth 7.
de Lunis 96.

Macfarlane 23, 29 *n*., 63.
Mac Laurin 7, 31.
Maillet 22.
Mainardi 30.
Malezieux 125.
de Malves (Gua) 31.
Manfredi 38, 95.
Mangoldt 43, 47, 46, 62.
Mansion 71.
Martin 22.
de Martino 95.
Maurolico, 125.
Maxwell 28.
Mazza 100.
Mehmke 61.
Meissel 44.
Mellor 116, 117.
Menecmo 6.
Menelao 124 *n*.
Méray 22, 49.
Mercator 11.
Mersenne 3.
Mertens 45, 46.
Meyer 61.
Milanesi 98.
Miller 50.
Minet 62.
Mittag Leffler 22, 23, 30.
Mittarelli 98 *n*.
Möbius 45.
Mohammed-ben-Musa 101.
von Mohl Anna 70.
de Moivre 86.
Monge 15, 18, 41.
Montucla 3.
Mori 92.
Mozzi 96.
Müller C. 102.
Müller Giov. 69.
Münger 10.
Mylon 4.

Nernst 116.
Newmann 6.
Newton 6.
Nicomede 8, 84.
Nöther 31, 83. 115 *n*.
Noviomago 60.

d'Ocagne 22, 62, 128.
Oscar re di Svezia 63.
Osgood 61.
d'Ovidio 25.
Ozanam 34.

Padé 22.
Padoa, 22.
Painlevé 90.
de Paolis 49.
Pappo 82 *n*.
Pareto 61.
Pascal B. 3, 4, 108, 125.
Pascal E. 58, 59, 64 *n*.
Pascal S. 8.
Pasch 92.
Peano 6, 7, 72, 107.
Penne Carolina 68.
Penne William 68.
Perrier 22.
Perry 14.
Perseo 7.
Perronchine 45.
Picard 116 *n*.
Picquet 7.
Pictzker 56, 57.
Piltz 46.
Pinto 94.
Piola 1, 4.
Pitseo 100.
Pittarelli 14, 92.
Pizzetti 89.
Plücker 109, 114,
Poggendorff 33, 69.
Pohlke 41.
Poincaré 23, 46, 126.
Poinsot 11.
Poisson 86, 87.
Poncelet 9, 37, 62.
Pressler 56.

Radau 27.
Ramus 125.
Rasi 31.
Receda 48, 49
Réthy 63.
Ribaucour 11.
Riccardi 33.
Riccati 38, 95.
Riemann 40, 43, 44, 45, 46, 47, 55, 78, 83, 84, 91, 112, 113, 116.
Riquier 62.
Roberval 3, 4, 7.
Roberts 9.
Rocca 2, 4.
Roch 112, 113.
Rodrigues 24.
Rogel 44, 47.
Rolle 7.
Rudio 18.
Ruffini 64.
Runge 127.

Sagredo 128.
Saintour 62.
Salmon 23.

Digitized by Google

Sauerbeck 31.
Sauvage 26.
Schaper 46.
Scheffers 23, 25, 88.
Scherk 47.
Schilling 32.
Schlesinger 63.
Schlömilch 45, 47.
Schönflies 62, 116, 116 *n*.
Schooten 4.
Schoute 8, 39, 42.
Schubert 39.
Schülke 79, 80.
Schur 72.
Schuster 61.
Schweins 115 *n*.
Scott 106, 110 *n*.
Serret P.
Severi 115 *n*.
Sluse 7.
Smith 45, 71.
Somigliana 93.
Stäckel 64.
Steiner 6, 14, 126.
Stieltjes 46.
Stirling 85.
Stolz 59, 60.
Strassnitzky 6.
Stringham 23.
Struve 90.
Studnicka 64.
Study 42, 48, 118, 122.
Sturm C. 11.
Sudhoff 93.
Sumner 11.
S. Vincenzo (G. da) 1, 2, 8, 64.
Sylow 83.
Sylvester 44, 46.

Tait 28, 29.
Tanneberg 62.
Tannery P. 93.
Targioni 99.
Tartaglia 92.
Tchebichef 43, 44, 45, 46, 86, 87.
Tenore 94.
Thibaut 127.
Thomson 29.
Tikhomandritzky 22.
Timerding 62.
Tiraboschi 99.
Tótossy 63.
Tonni-Bazza 92.
Tonelli 13.
Toppi 100.
Torelli 42, 48.
Torricelli 7, 37, 93.
Trepied 62.
Tschirnhausen 10.
Tycho Brahe 64.

Uhlhorn 6, 7.

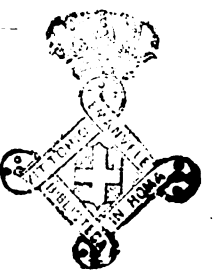
Vacca 1, 7, 92.
Vaes 22.
Vahlen 94.
Vailati 21, 54, 55, 56, 93.
Vaillant 62.
la Vallée Poussin 43, 45, 46, 47.
Valy 62.
Varignon 125.
Vecchi 48.
Vega 44.
von Velten Olga 69.
di Ventimiglia 96 *n*.
Vessiot 62.
Veronese 29, 39, 41, 72, 73, 74, 77, 78, 107, 114.
Vezzosi 34 *n*., 38 *n*.
Vico 56.
Vivanti 15, 28, 53, 60, 67, 80, 81, 92, 106, 116.
Vogt 42.
Vollprecht 29.
Volta 53, 93.
Volterra 23, 31.

Wallis 2, 3, 4.
Walton 10.
Watt 9.
Weber M. 31, 110, 111, 112, 12 *n*.
Weber 88.
Weierstrass 23, 59, 83, 83 *n*. 91, 105, 115, 115 *n*.
Weingarten 27.
Wiener 25 *n*.
Wigert 47.
Wilson 47, 71.
Wirtingen 61, 83.
Wölffing 109, 110.

Ximenes 92.

Yleo 30.

Zahradik 6.
Zeuthen 95.



Digitized by Google

TORINO - CARLO CLAUSEN - TORINO

C. BRUHNS

Direttore dell' Osservatorio e Professore di Astronomia in Lipsia

NUOVO MANUALE

LOGARITMICO - TRIGONOMETRICO

CON

SETTE DECIMALI

5.ª Edizione

L. 5,50.

E. T. KÖHLER

MANUALE

LOGARITMICO - TRIGONOMETRICO

CONTENENTE:

I Logaritmi volgari o di Brigg
di tutti i numeri fino a 10800 con sette decimali.
I Logaritmi di Gauss.
I Logaritmi delle Funzioni Trigonometriche
di dieci in dieci secondi
per i primi ed ultimi nove gradi del quadrante
e di minuto in minuto per gli altri gradi.
Le formole goniometriche ed altre tavole matematiche
che spesso occorrono nei calcoli

II.ª Edizione della Versione Italiana

L. 4.

Digitized by Google

TORINO - CARLO CLAUSEN - TORINO

GINO LORIA

Professore ordinario dell' Università di Genova

IL PASSATO ED IL PRESENTE

DELLE PRINCIPALI

TEORIE GEOMETRICHE

Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta

Lire 8.

INDICE:

CAP. I. — Sguardo alle origini ed allo sviluppo della geometria sin verso il 1850.
CAP. II. — Teoria delle curve piane algebriche.
CAP. IV. — Teoria delle curve algebriche a doppia curvatura.
CAP. V. — Geometria diff-renziale.
CAP. VI. — Ricerche intorno alla forma delle curve, delle superficie e di altre figure geometriche. Analysis situs. Configurazioni.
CAP. VII. — Geometria della retta nello spazio.
CAP. VIII. — Corrispondenze, rappresentazioni, trasformazioni.
CAP. IX. — Geometria numerativa.
CAP. X. — Geometria non-euclidea.
CAP. XI. — Geometria degli spazi a quantesivogliono dimensioni.
CAP. XII. — Epilogo.

GINO LORIA

ord. Professor d. höheren Geometrie an der Universität Genua

SPEZIELLE

algebraische und transscendente

EBENE KURVEN

THEORIE UND GESCHICHTE

Autorisierte, nach dem italienischen Manuskripte bearbeitete deutsche Ausgabe

von

FRITZ SCHÜTTE

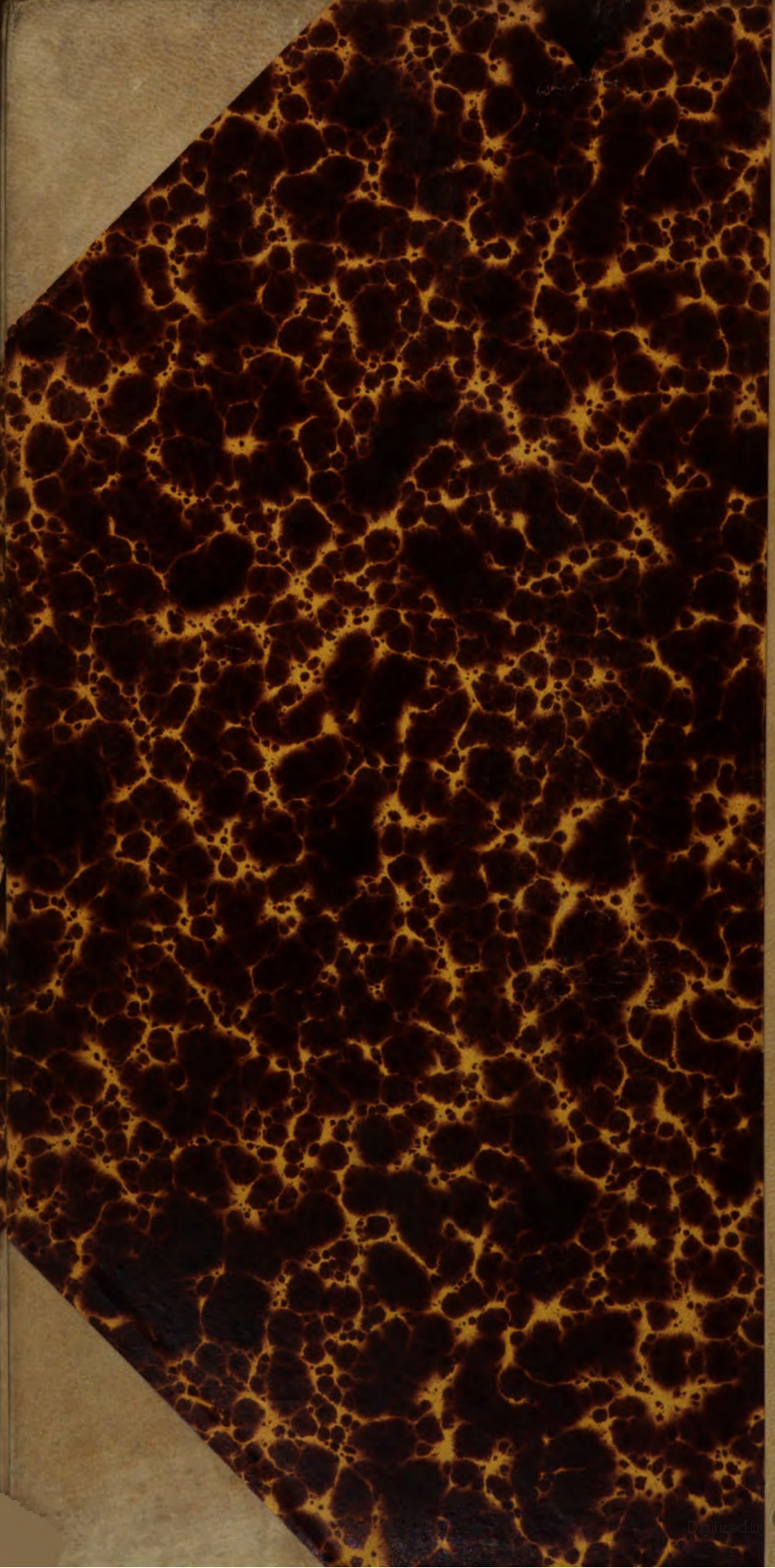
Mit 174 Figurem auf 17 lithographirten Tafeln

Mark 28.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google


Digitized by Google